Materia: Matemática de Tercer Año

Tema: Ecuaciones con valor absoluto

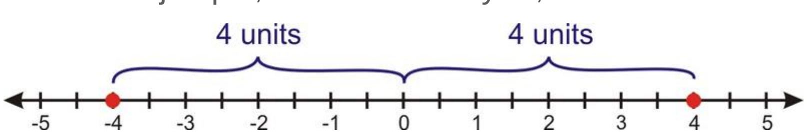
Objetivos

- Resolver una ecuación con valor absoluto.
- Analizar las soluciones de las ecuaciones con valor absoluto.
- Graficar funciones con valor absoluto.
- Resolver desigualdades con valor absoluto.
- Reescribir y resolver las desigualdades de valor absoluto como desigualdades compuestas.
- Resolver problemas reales utilizando ecuaciones con valor absoluto y desigualdades.

Introducción

Timmy está probando sus nuevos patines. No tiene permitido cruzar la calle, sin embargo, él patina de lado a otro frente a su casa. Si él patina 20 metros al este y 10 metros al oeste, a que distancia se encuentra del punto de partida? ¿Y si patina 20 metros al oeste y luego 10 metros al este?

El **valor absoluto** de un número es su distancia de cero en una recta numérica. Siempre hay dos números en la recta numérica que están a la misma distancia de cero. Por ejemplo, los números 4 y -4, cada uno tiene 4 unidades de distancia de cero.



$|4|$ representa la distancia desde 4 a cero, que es igual a 4.

$|-4|$ representa la distancia desde -4 a cero, que también es igual a 4.

De hecho, para cualquier número real x:

$|x| = x$si x no es negativo, y $|x| = -x$ si x es negativo.

Valor absoluto no tiene efecto sobre un número positivo, pero cambia un número negativo a su inversa positiva.

Ejemplo 1

Evalúe los siguientes valores absolutos.

a) $|25|$

b) $|-120|$

c) $|-3|$

d) $|55|$

e) $\left|-\frac{5}{4}\right|$

Solución

a) $|25| = 25$ Ya que el 25 es un número positivo, el valor absoluto no lo cambia.

b) $|-120| = 120$ Ya que -120 es un número negativo, el valor absoluto hace que sea positivo.

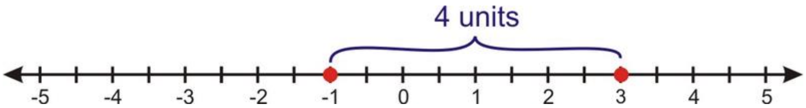
c) $|-3| = 3$Dado que -3 es un número negativo, el valor absoluto hace que sea positivo.

d) $|55| = 55$ Dado que 55 es un número positivo, el valor absoluto no cambia.

e) $\left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$ Dado que $-\frac{5}{4}$ es un número negativo, el valor absoluto hace que sea positivo.

El valor absoluto es muy útil para encontrar la distancia entre dos puntos en la recta numérica. La **distancia** entre dos puntos a y b en la recta numérica es $|a-b|$ o $|b-a|$.

Por ejemplo, la distancia de 3 a -1 en la recta numérica es $|3-(-1)| = |4| = 4$.



También podríamos haber encontrado la distancia restando en el orden contrario $|-1-3|=|-4|=4$. Esto tiene sentido ya que la distancia es la misma si usted evalua 3--1 o -1-3.

Ejemplo 2

Encontrar la distancia entre los siguientes puntos en la recta numérica.

a) 6 y 15

b) -5 y 8

c) -3 y -12

Solución

Distancia es el valor absoluto de la diferencia entre los dos puntos.

a) $\text{distance} = |6-15| = |-9| = 9$

b) $\text{distance} = |-5-8| = |-13| = 13$

c) $\text{distance} = |-3-(-12)| = |9| = 9$

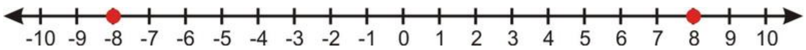
Recuerde: Cuando se calculó el cambio en x y en y como parte del cálculo de la pendiente, estos valores fueron positivos o negativos, dependiendo de la dirección del movimiento. En este caso, la "distancia" es solamente una distancia positiva.

Resolver una ecuación de valor absoluto

Ahora queremos resolver ecuaciones con valores absolutos. Considere la siguiente ecuación:

$|x| = 8$

Esto significa que la distancia desde el número x a cero es 8. Hay dos números que cumplen esta condición: 8 y -8.



Cuando resolvemos las ecuaciones de valor absoluto siempre tenemos en cuenta dos posibilidades:

1. La expresión en el signo de valor absoluto no es negativa.
2. La expresión en el signo de valor absoluto es negativa.

Luego resolvemos cada ecuación por separado.

Ejemplo 3

Resuelve las siguientes ecuaciones de valor absoluto.

a) $|x| = 3$

b) $|x| = 10$

Solución

a) Hay dos posibilidades: $x = 3$ **y** $x = -3$**.**

b) Hay dos posibilidades: $x = 10$ **y** $x = -10$**.**

Analizar las soluciones a las ecuaciones de valor absoluto

Ejemplo 4

Resuelve la ecuación $|x - 4| = 5$ *e interpretar las respuestas.*

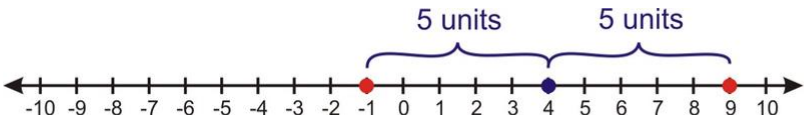
Solución

Consideramos dos posibilidades: la expresión dentro del signo de valor absoluto es negativa o no lo es. Luego resolvemos cada ecuación por separado.

$$\begin{aligned} x - 4 &= 5 \quad \text{and} \quad & x - 4 &= -5 \\ x &= 9 & x &= -1 \end{aligned}$$

$x = 9$ y $x = -1$ son las soluciones.

La ecuación $|x-4|=5$ puede interpretarse como: ¿Qué números se encuentran a 5 unidades de distancia del numero 4?” si trazamos la recta numérica vemos que hay dos posibilidades : 9 y -1.



Ejemplo 5

Resuelve la ecuación $|x+3|=2$ e interpretar las respuestas.

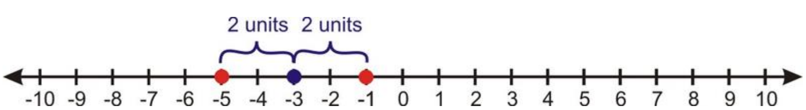
Solución

Resuelva las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+3&=2 \quad \text{and} \quad & x+3&=-2 \\ x&=-1 & x&=-5 \end{aligned}$$

$x=-5$ y $x=-1$ son las respuestas.

La ecuación $|x+3|=2$ puede ser reescrita como: $|x-(-3)|=2$ Y pordemos interpretarla como¿Qué números en la recta numérica se encuentran a 2 unidades de distancia de -3?. Lo que deja 2 posibilidades -5 Y -1.



Ejemplo 6

Resuelve la ecuación $|2x-7|=6$ e interpretar las respuestas.

Solución

Resuelva las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x-7&=6 & 2x-7&=-6 \\ 2x&=13 \quad \text{and} \quad & 2x&=1 \\ x&=\frac{13}{2} & x&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Respuesta: $x=\frac{13}{2}$ y $x=\frac{1}{2}$.

Texto traducido de: www.ck12.org

www.guao.org

La interpretación de este problema es más clara si la ecuación $|2x-7|=6$ se divide por 2 a ambos lados para llegar $\frac{1}{2}|2x-7|=3$. Como $\frac{1}{2}$ no es negativo podemos distribuirlo sobre el signo de valor absoluto para llegar $\left|x-\frac{7}{2}\right|=3$.La pregunta entonces es "¿Qué números en la recta numérica se encuentran a 3 unidades de distancia de $\frac{7}{2}$? "Hay dos respuestas: $\frac{13}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

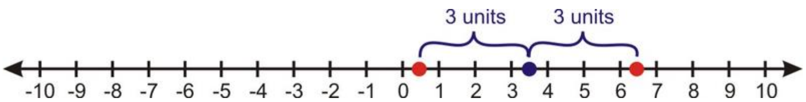
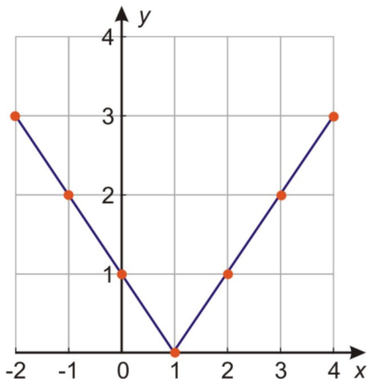


Gráfico de funciones de valor absoluto

Ahora echemos un vistazo a cómo representar gráficamente las funciones de valor absoluto.

Considere la función $y=|x-1|$. Podemos graficar esta función haciendo una tabla de valores:

x	$y=\|x-1\|$
-2	$y=\|-2-1\|=\|-3\|=3$
-1	$y=\|-1-1\|=\|-2\|=2$
0	$y=\|0-1\|=\|-1\|=1$
1	$y=\|1-1\|=\|0\|=0$
2	$y=\|2-1\|=\|1\|=1$
3	$y=\|3-1\|=\|2\|=2$
4	$y=\|4-1\|=\|3\|=3$



Se puede ver que la gráfica de una función de valor absoluto hace una gran "V".Se compone de dos rayos de línea (o segmentos de línea), una con pendiente positiva y una con pendiente negativa, unidas en el **vértice** o **cúspide**.

Ya hemos visto que para resolver una ecuación de valor absoluto debemos considerar dos opciones:

1. La expresión en el valor absoluto no es negativa.
2. La expresión en el valor absoluto es negativa.

La combinación de estas dos opciones nos da las dos partes de la gráfica.

En el ejemplo anterior, la expresión dentro del signo de valor absoluto es $x-1$. Por definición, esta expresión no es negativa cuando $x-1 \geq 0$, lo que quiere decir que se cumple cuando $x \geq 1$. Cuando la expresión dentro del signo de valor absoluto no es negativa, sólo se puede quitar el signo de valor absoluto. Así que para todos los valores de x mayor que o igual a 1, la ecuación es sólo $y = x - 1$.

Por otro lado, cuando $x-1<0$- en otras palabras, cuando $x<1$- la expresión dentro de la señal de valor absoluto es negativa. Eso significa que tenemos que colocar el signo de valor absoluto y también multiplicar la expresión por -1. Así que para todos los valores de x menores que 1, la ecuación es $y=-(x-1)$, o $y=-x+1$.

Estos ambos gráficos son líneas rectas, como se muestra arriba. Se reúnen en el punto donde $x-1=0$- es decir, en $x=1$.

Podemos graficar funciones de valor absoluto por su desglose algebraico como se acaba de hacer, o podemos graficarlo utilizando una tabla de valores. Sin embargo, cuando la ecuación de valor absoluto es lineal, la forma más fácil de graficarlo es combinar esas dos técnicas, de la siguiente manera:

1. Encuentre el vértice de la gráfica mediante el establecimiento de la expresión en el interior del valor absoluto igual a cero y encuentre x.
2. Haga una tabla de valores que incluye el vértice, un valor menor que el vértice, y un valor mayor que el vértice. Calcule los valores correspondientes de y utilizando la función.
3. Conecte con dos líneas rectas que se unen en el vértice.

Ejemplo 7

Grafique la función $y = |x + 5|$.

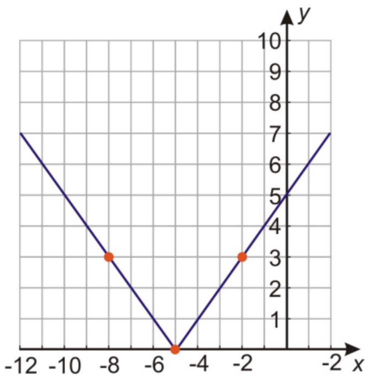
Solución

Paso 1 : Encuentre el vértice resolviendo $x + 5 = 0$. El vértice se encuentra en $x = -5$.

Paso 2 : Haga una tabla de valores:

x	$y = \|x + 5\|$
-8	$y = \|-8 + 5\| = \|-3\| = 3$
-5	$y = \|-5 + 5\| = \|0\| = 0$
-2	$y = \|-2 + 5\| = \|3\| = 3$

Paso 3 : Marque los puntos y dibuje dos líneas rectas que se unen en el vértice:



Ejemplo 8

Grafique la función de valor absoluto: $y = |3x - 12|$

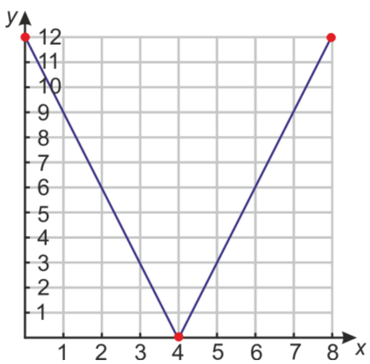
Solución

Paso 1 : Encuentre el vértice resolviendo $3x - 12 = 0$. El vértice está en $x = 4$.

Paso 2 : Haga una tabla de valores:

x	$y = \lvert 3x - 12 \rvert$
0	$y = \lvert 3(0) - 12 \rvert = \lvert -12 \rvert = 12$
4	$y = \lvert 3(4) - 12 \rvert = \lvert 0 \rvert = 0$
8	$y = \lvert 3(8) - 12 \rvert = \lvert 12 \rvert = 12$

Paso 3: Represente gráficamente los puntos y dibuje dos líneas rectas que se unan en el vértice.



Resolver problemas del mundo real usando las ecuaciones de valor absoluto

Ejemplo 9

Una compañía empaqueta granos de café en bolsas herméticas. Cada bolsa debe pesar 16 oz, pero es difícil llenar cada bolsa con el peso exacto. Después que se llena, cada bolsa se pesa, y si tiene más de 0,25 oz sobrepeso o bajo peso, se vacía y se reenvasada. ¿Cuáles son las bolsas aceptables mayor y menor?

Solución

El peso de cada bolsa se le permite estar lejos de 0,25 oz 16 oz, en otras palabras, la *diferencia* se permite entre el peso de la bolsa y 16 oz a ser 0,25 oz. Así que si x es el peso de una bolsa en onzas, a continuación, la ecuación que describe este problema es $|x - 16| = 0.25$.

Ahora debemos considerar las opciones positivas y negativas y resolver cada ecuación por separado:

$$\begin{array}{lcl} x-16=0.25 & \text{and} & x-16=-0.25 \\ x=16.25 & & x=15.75 \end{array}$$

La bolsa aceptable ligera pesa 15,75 oz y la más pesada pesa 16,25 oz.

Vemos que $16.25-16=0.25\ ounces$ y $16-15.75=0.25\ ounces$. Las respuestas son 0,25 oz mayor y menor de 16 onzas, respectivamente.

La respuesta concuerda.

La respuesta que acaba de encontrar describe las bolsas de mayor y menor aceptables de los granos de café. Pero, ¿cómo se describe el posible rango total de los pesos aceptables? Ahí es donde las desigualdades se hacen útiles una vez más.

Las desigualdades de valor absoluto

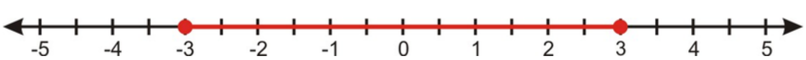
Desigualdades de valor absoluto se resuelven de una manera similar a las ecuaciones de valor absoluto. En ambos casos, se debe tener en cuenta las mismas dos opciones:

1. La expresión en el valor absoluto no es negativa.
2. La expresión en el valor absoluto es negativa.

A continuación, debe resolver cada desigualdad por separado.

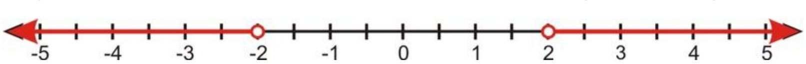
Resolver desigualdades de valor absoluto

Tenga en cuenta la desigualdad $|x| \leq 3$. Dado que el valor absoluto de x representa la distancia a cero, las soluciones a esta desigualdad son esos números cuya distancia de cero es menor que o igual a 3. El gráfico siguiente muestra esta solución:



Tenga en cuenta que esta es también la gráfica de la desigualdad compuesta $-3 \leq x \leq 3$.

Consideremos ahora la desigualdad $|x| > 2$. Dado que el valor absoluto de x representa la distancia de cero, las soluciones a esta desigualdad son esos números cuya distancia de cero son más de 2. El gráfico siguiente muestra esta solución.



Tenga en cuenta que esta es también la gráfica de la desigualdad compuesta $x < -2$ o $x > 2$.

Ejemplo 1

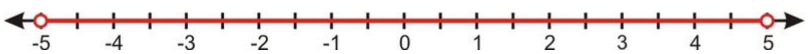
Resuelve las siguientes desigualdades y muestran el gráfico de solución.

a) $|x| < 5$

b) $|x| \geq 2.5$

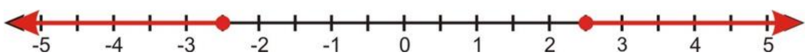
Solución

a) $|x| < 5$ representa todos los números cuya distancia de cero es menor que 5.



Esta respuesta puede ser escrito como " $-5 < x < 5$".

b) $|x| \geq 2.5$representa todos los números cuya distancia de cero es mayor o igual a 2,5



Esta respuesta puede ser escrita como " $x \leq -2.5$o $x \geq 2.5$".

Vuelve a escribir y resolver las desigualdades de valor absoluto como desigualdades compuestas

En la última sección se vio que las desigualdades de valor absoluto como desigualdades compuestas.

Desigualdades del tipo $|x|$se pueden reescribir como " $-a < x < a$".

Desigualdades del tipo $|x| > b$se pueden reescribir como " $x < -b$ o $x > b$".

Para resolver una desigualdad de valor absoluto, separamos la expresión en dos desigualdades y resolver cada uno de ellos individualmente.

Ejemplo 2

Resuelva la desigualdad $|x - 3| < 7$*y mostrar el gráfico de solución.*

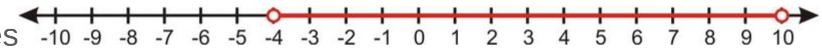
Solución

Vuelva a escribir como una desigualdad compuesta: $-7 < x - 3 >< 7 < /x - 3 >$

Escribe como dos desigualdades separadas: $x-3<7$y$x-3>-7$

Resuelve cada desigualdad $x<10$y$x>-4$

Vuelva a escribir la solución: $-4<x<10$

El gráfico solución es 

Podemos pensar en la pregunta que se hace aquí como "¿Qué números están a 7 unidades de 3?", La respuesta puede expresarse como "Todos los números entre -4 y 10."

Ejemplo 3

Resuelve la desigualdad $|4x+5|\leq 13$*y mostrar el gráfico de solución.*

Solución

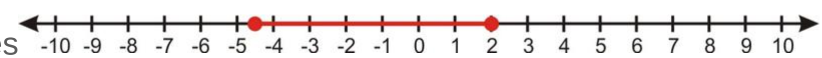
Vuelva a escribir como una desigualdad compuesta: $-13\leq 4x+5\leq 13$

Escribe como dos desigualdades separadas: $4x+5\leq 13$y$4x+5\geq -13$

Resuelve cada desigualdad $4x\leq 8$y$4x\geq -18$

$x\leq 2$ y $x\geq -\frac{9}{2}$

Vuelva a escribir la solución: $-\frac{9}{2}\leq x\leq 2$

El gráfico solución es 

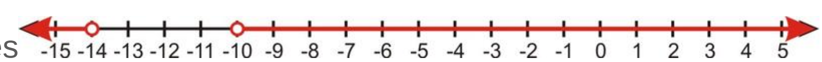
Ejemplo 4

Resuelve la desigualdad $|x+12|>2$*y mostrar el gráfico de solución.*

Solución

Vuelva a escribir como una desigualdad compuesta: $x+12<-2$o$x+12>2$

Resuelve cada desigualdad: $x<-14$o$x>-10$

El gráfico solución es 

Ejemplo 5

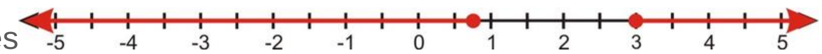
Resuelve la desigualdad $|8x-15|\geq 9$*y mostrar el gráfico de solución.*

Solución

Vuelva a escribir como una desigualdad compuesta: $8x - 15 \leq -9$ o $8x - 15 \geq 9$

Resuelve cada desigualdad: $8x \leq 6$ o $8x \geq 24$

$x \leq \frac{3}{4}$ o $x \geq 3$

El gráfico solución es 

Resolver problemas del mundo real mediante desigualdades de valor absoluto

Desigualdades de valores absolutos son útiles en problemas en los que estamos tratando con un rango de valores.

Ejemplo 6

La velocidad de un objeto viene dada por la fórmula $v = 25t - 80$*, donde el tiempo se expresa en segundos y la velocidad se expresa en metros por segundo. Encuentra los tiempos para los que la magnitud de la velocidad es mayor o igual a 60 pies por segundo.*

Solución

La *magnitud* de la velocidad es el valor absoluto de la velocidad. Si la velocidad es $25t - 80$ pies por segundo, a continuación, su magnitud es $|25t - 80|$ pies por segundo. Queremos saber si esta magnitud es mayor o igual a 60, por lo que tenemos que resolver $|25t - 80| \geq 60$ para t.

Primero tenemos que dividirlo: $25t - 80 \geq 60$ o $25t - 80 \leq -60$

Luego resuelve: $25t \geq 140$ o $25t \leq 20$

$t \geq 5.6$ o $t \leq 0.8$

La magnitud de la velocidad es mayor que 60 m / s para los tiempos **de menos de 0,8 segundos** y para tiempos **superiores a 5,6 segundos.**

Cuando $t = 0.8\ seconds,\ \ v = 25(0.8) - 80 = -60\ ft$. La magnitud de la velocidad es 60 pies / seg. (El signo negativo en la respuesta significa que el objeto se está moviendo hacia atrás.)

Cuando $t = 5.6 \ seconds, \ v = 25(5.6) - 80 = 60 \ ft$.

Para encontrar donde la magnitud de la velocidad es **mayor** de 60 pies / seg, comprobar algunos valores arbitrarios en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo: $t \le 0.8, \ 0.8 \le t \le 5.6$ y $t \ge 5.6$.

Comprobar $t = 0.5 : \ \ v = 25(0.5) - 80 = -67.5 \ ft$

Comprobar $t = 2 : \ \ v = 25(2) - 80 = -30 \ ft$

Comprobar $t = 6 : \ \ v = 25(6) - 80 = -70 \ ft$

Usted puede ver que la magnitud de la velocidad es superior a 60 m / s cuando $t \ge 5.6$ o cuando $t \le 0.8$.

La respuesta concuerda.

Resumen de la lección

- El valor absoluto de un número es su distancia de cero en una recta numérica.
- $|x| = x$ si x no es negativo, y $|x| = -x$ si x es negativo.
- Una ecuación o desigualdad con un valor absoluto en el mismo **se divide en dos ecuaciones,** una en la que la expresión dentro del signo de valor absoluto es positivo y el otro en el que es negativo. Cuando la expresión en el valor absoluto es **positiva**, entonces los signos del valor absoluto no hacen nada y se pueden omitir. Cuando la expresión en el valor absoluto es **negativa,** entonces la expresión dentro de los signos de valor absoluto debe ser negada antes de quitar las señales.
- Desigualdades del tipo $|x|$ se pueden reescribir como " $-a < x < a$. "
- Desigualdades del tipo $|x| > b$ se pueden reescribir como " $x < -b$ o $x > b$".

Preguntas de repaso

Evalúe los valores absolutos.

1. $|250|$
2. $|-12|$

3. $\left|-\frac{2}{5}\right|$

4. $\left|\frac{1}{10}\right|$

Encontrar la distancia entre los puntos.

5. 12 y -11
6. 5 y 22
7. -9 Y -18
8. -2 Y 3

Resolver las ecuaciones de valor absoluto e interpretar los resultados mediante la representación gráfica de las soluciones en la recta numérica.

9. $|x-5|=10$
10. $|x+2|=6$
11. $|5x-2|=3$
12. $|x-4|=-3$

Representa gráficamente las funciones de valor absoluto.

13. $y=|x+3|$
14. $y=|x-6|$
15. $y=|4x+2|$
16. $y=\left|\frac{x}{3}-4\right|$

Resuelve las siguientes desigualdades y muestran el gráfico de solución.

13. $|x| \leq 6$
14. $|x| > 3.5$
15. $|x| < 12$
16. $|x| > 10$
17. $|7x| \geq 21$

18. $|x-5|>8$

19. $|x+7|<3$

20. $\left|x-\frac{3}{4}\right| \le \frac{1}{2}$

21. $|2x-5| \ge 13$

22. $|5x+3|<7$

23. $\left|\frac{x}{3}-4\right| \le 2$

24. $\left|\frac{2x}{7}+9\right| > \frac{5}{7}$

   1. ¿Cuántas soluciones tiene la desigualdad $|x| \le 0$ tiene?
   2. ¿Qué hay de la desigualdad $|x| \ge 0$?

25. Una empresa fabrica gobernantes. Sus gobernantes 12 pulgadas pasan el control de calidad si se encuentran dentro $\frac{1}{32}\ inches$ de la duración ideal.¿Cuál es la regla más larga y la más corta que se puede salir de la fábrica?

26. Un niño de tres meses de edad bebé pesa un promedio de 13 libras. Se le considera saludable si él está en la mayoría de 2,5 libras. más o menos que el peso promedio. Encuentre el rango de peso que se considera saludable para tres meses de edad los niños.