Materia: Matemática de Séptimo
Tema: Ángulos y pares de ángulos

Objetivos de aprendizaje

- Entender e identificar ángulos complementarios.
- Entender e identificar ángulos suplementarios.
- Entender y utilizar el postulado de par lineal.
- Entender e identificar ángulos verticales.

Marco Teórico

En esta lección aprenderás sobre pares de ángulos especiales y probarás uno de los teoremas más útiles en geometría, el teorema de ángulos verticales.

Ángulos complementarios

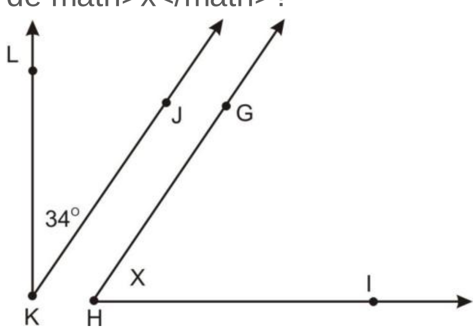
Un par de ángulos son **complementarios** si la suma resultante de sus medidas es 90°.

Los ángulos complementarios no tienen que ser congruentes entre sí. Lejos de eso, la única cualidad que los define es que la suma de sus medidas es igual a la medida del ángulo recto: 90°. Si los rayos externos de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto, entonces los ángulos son complementarios.

Ejercicios Resueltos

Ejemplo 1

Los ángulos de abajo son complementarios: $m\angle GHI = x$. ¿Cuál es el valor de math>x</math>?



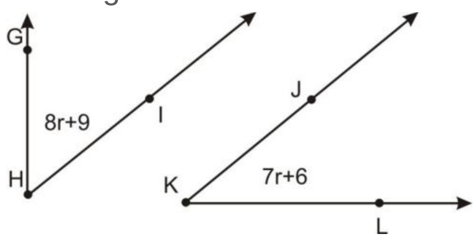
Como tú ya sabes que la suma de los dos ángulos debe ser $90°$, entonces ya puedes plantear una ecuación. Luego, despeja la variable. En este caso, la variable es x.

$$34 + x = 90$$
$$34 + x - 4 = 90 - 34$$
$$x = 56$$

Por lo tanto, el valor de x es $56°$.

Ejemplo 2

Los ángulos a continuación son complementarios. ¿Cuánto mide cada uno?



Este problema es un poco más complicado que el primero. De todas formas, los conceptos siguen siendo los mismos. Si tú sumas ambos ángulos, su resultado será $90°$. De esta manera, puedes plantear una ecuación algebraica con los valores presentados.

$$(7r + 6) + (8r + 9) = 90$$

La mejor manera de resolver esta ecuación es despejando r. Luego, sustituyes el valor de r en las expresiones originales para encontrar el valor de cada ángulo.

$$(7r + 6) + (8r + 9) = 90$$
$$15r + 15 = 90$$
$$15r + 15 - 15 = 90 - 15$$
$$15r = 75$$
$$\frac{15r}{15} = \frac{75}{15}$$
$$r = 5$$

El valor de r es 5. Ahora, sustituye este valor en las expresiones para encontrar las medidas de los dos ángulos del diagrama.

$$\begin{array}{ll} 7r+6 & 8r+9 \\ 7(5)+6 & 8(5)+9 \\ 35+6 & 40+9 \\ 41 & 49 \end{array}$$

$m\angle JKL = 41^\circ$ y $m\angle GHI = 49^\circ$. Puedes revisar, para asegurarte de que estos números son los correctos, verificando que sean complementarios.

$$41+49=90$$

Como la suma de los dos ángulos es de 90°, entonces son complementarios.

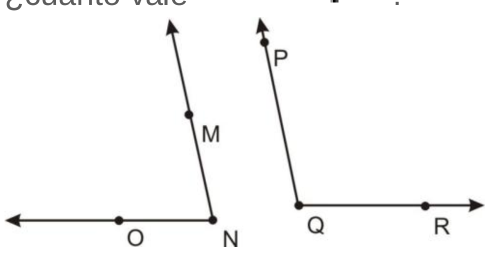
Ángulos suplementarios

Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es igual a 180°.

Al igual que los ángulos complementarios, los ángulos suplementarios no tienen que ser congruentes entre sí, ni siquiera tienen que estar adyacentes. Su única cualidad es que al sumarlos, el resultado dé 180°. Puedes usar esta información para resolver diferentes tipos de problemas.

Ejemplo 3

Los dos ángulos a continuación son suplementarios. Si $m\angle MNO = 78^\circ$, ¿cuánto vale $m\angle PQR$?



Este procedimiento es muy directo. Ya que sabes que la suma de los dos ángulos debe dar 180°, ya puedes plantear una ecuación. Usa una variable para representar el ángulo desconocido y luego despéjala. En este caso, sustituyamos y por $m\angle PQR$.

$$78 + y = 180$$
$$78 + y - 78 = 180 - 78$$
$$y = 102$$

Así, el valor de $y = 102$, por lo que $m\angle PQR = 102^\circ$.

Ejemplo 4

¿Cuánto miden dos ángulos congruentes que sean también suplementarios?

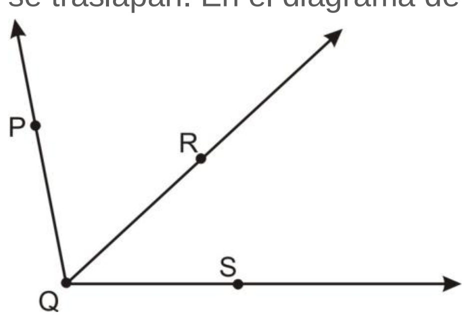
No tenemos un diagrama que nos ayude a visualizar este escenario, así que tendrás que imaginar los ángulos (o aún mejor, ¡trata de dibujar por ti mismo traduciendo estas palabras en una imagen!). Dos ángulos suplementarios deben sumar 180°. Los ángulos congruentes deben medir lo mismo. Ahora, lo que tú tienes que hacer es encontrar dos ángulos congruentes que sean suplementarios. Puedes dividir 180° entre dos para encontrar el valor de cada ángulo.

$$180 \div 2 = 90$$

Cada ángulo congruente y suplementario medirá 90°. En otras palabras, serán ángulos rectos.

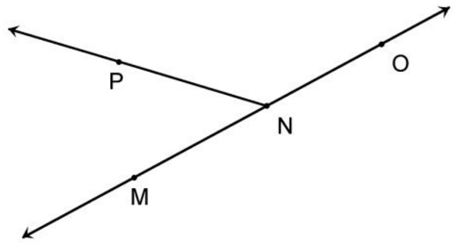
Pares lineales

Antes de comenzar a hablar sobre un caso especial de pares de ángulos llamados **pares lineales**, necesitamos definir a los **ángulos adyacentes**. Dos ángulos son adyacentes si ambos comparten el mismo vértice y un lado, pero no se traslapan. En el diagrama de abajo, $\angle PQR$ y $\angle RQS$ son adyacentes.



Al contrario, $\angle PQR$ y $\angle PQS$ no son adyacentes porque se traslapan (esto es porque comparten puntos comunes en el interior del ángulo).
Ahora ya estamos listos para hablar sobre pares lineales. Un **par lineal** son dos ángulos adyacentes cuyos lados que no son comunes forman una línea recta. En

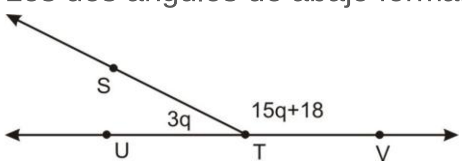
el diagrama de abajo, $\angle MNP$ y $\angle PNO$ son un par lineal. Nota que $\overleftrightarrow{MO}$ es una línea.



Los pares lineales son tan importantes en geometría que tienen su propio postulado.
Postulado del par lineal: Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Ejemplo 5

Los dos ángulos de abajo forman un par lineal. ¿Cuánto mide cada ángulo?



Si sumas ambos ángulos, el resultado será $180°$. Entonces, puedes plantear una ecuación algebraica con los valores presentados.

$$(3q) + (15q + 18) = 180$$

La mejor manera de resolver este problema es despejar q de la ecuación de arriba. Luego, debes sustituir el valor de q de nuevo en las expresiones originales para encontrar el valor de cada ángulo.

$$\begin{aligned}
(3q) + (15q + 18) &= 180 \\
18q + 18 &= 180 \\
18q &= 180 - 18 \\
18q &= 162 \\
\frac{18q}{18} &= \frac{162}{18} \\
q &= 9
\end{aligned}$$

El valor de q es 9. Ahora, sustituye de vuelta este valor en las expresiones para determinar las medidas de los dos ángulos del diagrama.

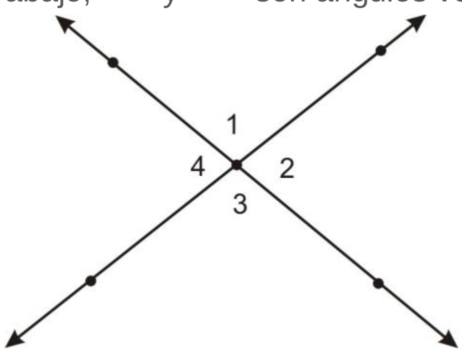
$3q$	$15q+18$
$3(9)$	$15(9)+18$
27	$135+18$
	153

Los dos ángulos del diagrama miden 27° y 153°, respectivamente. Sabrás que tu resultado está correcto verificando que éstos sean suplementarios.

$$27+153=180$$

Ángulos verticales (opuestos)

Ahora que ya entiendes los ángulos suplementarios y complementarios, podemos examinar situaciones más complicadas. Se forman relaciones especiales entre ángulos cuando dos líneas se intersectan, y puedes usar tu conocimiento sobre pares lineales y ángulos para explorar más cada uno de los ángulos.
Los **ángulos verticales (opuestos)** están definidos como dos ángulos no adyacentes formados por líneas que se intersectan entre sí. En el diagrama de abajo, $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales.



Supón que conoces $m\angle 1=100^\circ$. Tú puedes usar esta información para encontrar la medida de todos los demás ángulos. Por ejemplo, $\angle 1$ y $\angle 2$ deben ser suplementarios, ya que forman un par lineal. Entonces, para encontrar $m\angle 2$, resta 100° de 180°.

$$\begin{aligned} m\angle 1 + m\angle 2 &= 180 \\ 100 + m\angle 2 &= 180 \\ m\angle 2 &= 180 - 100 \\ m\angle 2 &= 80 \end{aligned}$$

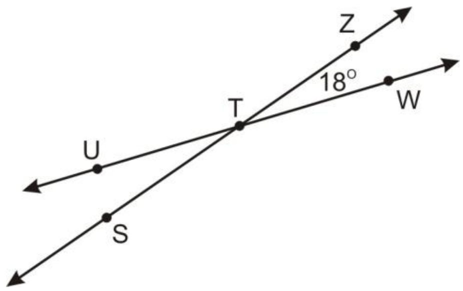
Así, $\angle 2$ mide 80°. Si sabemos que los ángulos 2 y 3 también son suplementarios, significa que $m\angle 3 = 100^\circ$, ya que el resultado de sumar 100° y 80° es 180°. Si el ángulo 3 mide 100°, entonces la medida del ángulo 4tiene que ser 80°, ya que los ángulos <mathy que >3</math> y 4 también son suplementarios. Nota que los ángulos1 y 3 son congruentes (100°), y 2 y 4también son congruentes (80°).
El **teorema de ángulos verticales (opuestos)** establece que si dos ángulos son verticales (opuestos), éstos tienen que ser congruentes.

Podemos probar el teorema de ángulos verticales u opuestos usando un procedimiento parecido al que usamos anteriormente. No hay nada en especial en la medida dada de $\angle 1$. Aquí está la prueba de que los ángulos verticales u opuestos siempre serán congruentes: Ya que $\angle 1$ y $\angle 2$ forman un par lineal, sabemos que son suplementarios, es decir, $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$. De la misma forma podemos decir que $\angle 2$ y $\angle 3$ también son suplementarios. Tenemos otra vez que $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$. Usando una sustitución, podemos escribir $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$. Finalmente, restando $m\angle 2$a ambos lados, llegamos a que $m\angle 1 = m\angle 3$, o lo que es lo mismo, por definición de ángulos congruentes, $\angle 1 \cong \angle 3$.

Usa tus conocimientos sobre ángulos verticales (opuestos) para resolver el siguiente problema.

Ejemplo 6

¿Cuál es el valor de $m\angle STU$ en el diagrama de abajo?



Usando tu conocimiento de líneas que se intersectan, puedes identificar que $\angle STU$ es vertical u opuesto al ángulo rotulado con 18°. Ya que los ángulos opuestos son congruentes, deben tener la misma medida. De esta manera, $m\angle STU$ es igual a 18°.

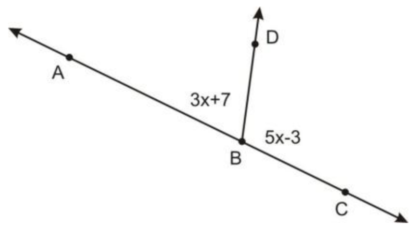
Ejercicios

En esta lección exploramos los pares de ángulos. Específicamente, aprendimos:

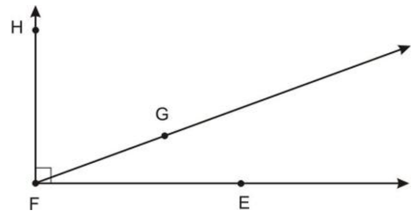
- Cómo entender e identificar ángulos complementarios.
- Cómo entender e identificar ángulos suplementarios.
- Cómo entender y utilizar el postulado de par lineal.
- Cómo entender e identificar ángulos verticales u opuestos.

Las relaciones entre los diferentes ángulos son usadas en casi cada tipo de aplicación geométrica. Asegúrate de que estos conceptos sean retenidos a medida que progreses en tu estudio.

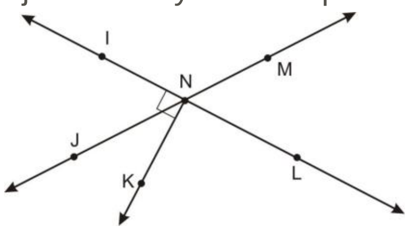
1. Encuentra la medida del ángulo complementario a $\angle A$ si $m\angle A =$
   a. 45°
   b. 82°
   c. 19°
   d. z°
2. Encuentra la medida del ángulo suplementario a $\angle B$ si
   a. 45°
   b. 118°
   c. 32°
   d. x°



3. Encuentra $m\angle ABD$ y $m\angle DBC$.
4. Dado $m\angle EFG = 20^\circ$, encuentra $m\angle HFG$



. Usa el diagrama a continuación para resolver los ejercicios 5 y 6. Nota que $\overline{NK} \perp \overleftrightarrow{IL}$.



5. Identifica y rotula cada uno de los siguientes ángulos (es probable que exista más de una respuesta correcta para algunas de las preguntas).
   a. Un par de ángulos verticales u opuestos.
   b. Un par de ángulos lineales.
   c. Un par de ángulos complementarios.
   d. Un par de ángulos suplementarios.
6. Dado que $m\angle IJN = 63^\circ$, encuentra
   a. $m\angle JNK$.
   b. $m\angle KNL$.
   c. $m\angle MNL$.
   d. $m\angle MNI$.

Respuestas

1.
   a. 45°
   b. 8°
   c. 81°

    d. $(90 - z)^\circ$
    e. 135°
    f. 62°
    g. 148°
    h. $(180 - x)^\circ$
2. $m\angle ABD = 73^\circ$, $m\angle DBC = 107^\circ$
3. $m\angle HFG = 70^\circ$
    a. $\angle JNI$ and $\angle MNL$ (or $\angle INM$ and $\angle JNL$ also works);
    b. $\angle INM$ and $\angle MNL$ (or $\angle INK$ and $\angle KNL$ also works);
    c. $\angle INK$ and $\angle JNK$;
    d. same as (b) $\angle INM$ and $\angle MNL$ (or $\angle INK$ and $\angle KNL$ also works).
    e. 27°
    f. 90°
    g. 63°
    h. 117°