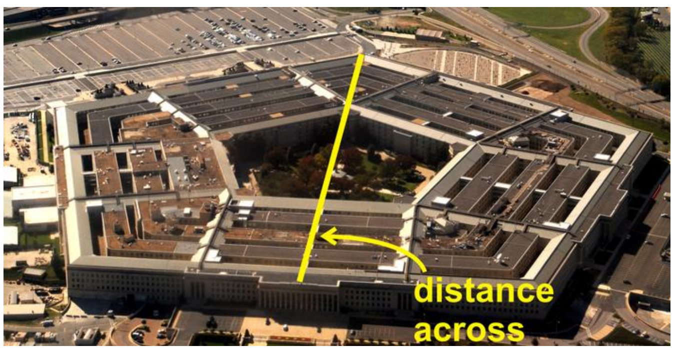
Materia: Matemática de Séptimo
Tema: Área de Polígonos

¿Qué pasa si te piden que encuentres la distancia del Pentágono en Arlington, VA? El Pentágono, que también alberga el Departamento de Defensa de EE.UU., se compone de dos pentágonos regulares con el mismo centro. Toda el área del edificio es de 29 acres (40.000 metros cuadrados en un acre) con un patio de 5 acres adicionales en el centro. La longitud de cada pared exterior es de 921 pies. ¿Cuál es la distancia total del Pentágono? Redondea tu respuesta a la centésima más cercana. Después de completar éste concepto serás capaz de responder a preguntas como ésta.

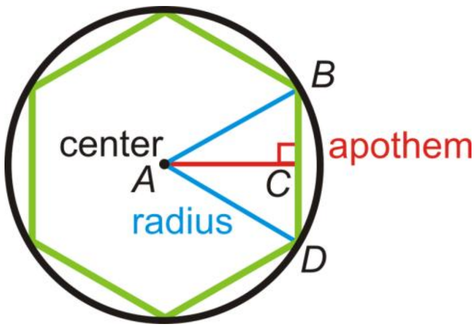


Marco Teórico

Un polígono regular es un polígono con lados y ángulos congruentes. Recordemos que el perímetro de un cuadrado es 4 veces la longitud de un lado ya que cada lado es congruente. Podemos extender este concepto a cualquier polígono regular.

Perímetro de un polígono regular: Si la longitud de un lado es s y hay n cantidad de lados en un polígono regular entonces el perímetro es $P = ns$.

Para encontrar el área de un polígono regular es necesario definir una nueva terminología. En primer lugar todos los polígonos regulares pueden estar inscritos dentro de un círculo. Así polígonos regulares tienen un **centro** y **radio** que son el centro y el radio del círculo circunscrito. También como un círculo un polígono regular tendrá un ángulo central formado. Sin embargo en un polígono regular el ángulo central es el ángulo formado por dos radios dibujado a los vértices consecutivos del polígono. Se puede observar en la imagen de abajo en el ángulo central $\angle BAD$. También observe que $\triangle BAD$es un triángulo isósceles. Cada polígono regular de n lados está formado por n triángulos isósceles. La altura de estos triángulos isósceles se llama la **apotema**.



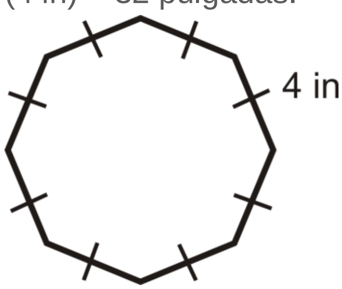
El área de cada triángulo $A_{\triangle} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}sa$. Donde s es la longitud de un lado y $a$es la apotema. Si hay $n$partes en el polígono regular entonces está constituido por $n$triángulos congruentes.

Área de un polígono regular: Si hay $n$partes con una longitud s de un polígono regular y a es la apotema entonces $A = \frac{1}{2}asn$ o $A = \frac{1}{2}aP$ donde P es el perímetro.

Ejemplo A

¿Cuál es el perímetro de un octógono regular cuyos lados miden 4 pulgadas?

Si cada lado es de 4 pulgadas y hay 8 lados eso significa que el perímetro es de 8 (4 in) = 32 pulgadas.



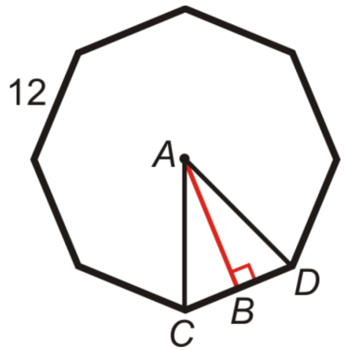
Ejemplo B

El perímetro de un heptágono regular es 35 cm. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

Si $P = ns$, entonces $35\ cm = 7s$. Por lo tanto, $s = 5\ cm$.

Ejemplo C

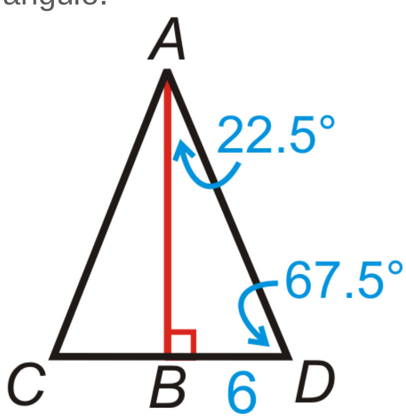
Encontrar la longitud de la apotema del octógono regular. Redondea tu respuesta a la centésima más cercana.



Para encontrar la longitud de la apotema, AB, tendrás que usar las razones trigonométricas. En primer lugar encontrar $m\angle CAD$. Hay 360° alrededor de un punto por lo que $m\angle CAD = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Ahora podemos usar esto para encontrar los otros dos ángulos $\triangle CAD$. $m\angle ACB$ y $m\angle ADC$ son iguales porque $\triangle CAD$ es un triángulo rectángulo.

$$\begin{aligned} m\angle CAD + m\angle ACB + m\angle ADC &= 180^\circ \\ 45^\circ + 2m\angle ACB &= 180^\circ \\ 2m\angle ACB &= 135^\circ \\ m\angle ACB &= 67.5^\circ \end{aligned}$$

Para encontrar AB debemos usar la razón tangente. Puede utilizar cualquiera de ángulo.



$$\tan 67.5° = \frac{AB}{6}$$

$$AB = 6 \cdot \tan 67.5° \approx 14.49$$

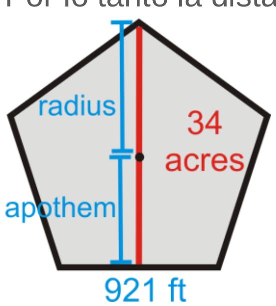
Volvamos al problema del Pentágono.

A partir de la imagen de abajo podemos ver que la distancia total entre el Pentágono es la longitud de la apotema más la longitud del radio. La superficie total del Pentágono es 34 hectáreas, que es 2.720.000 pies cuadrados. Por lo tanto la ecuación del área es $2720000 = \frac{1}{2}a(921)(5)$ y la apotema es 590.66 pies.

Para encontrar el radio podemos usar el teorema de Pitágoras con la apotema y la mitad de la longitud de un lado o la relación de seno. Recordemos que en el Ejemplo 5 cada ángulo central de un pentágono es $72°$ por lo que usaríamos la mitad de éste para el triángulo rectángulo.

$$\sin 36° = \frac{460.5}{r} \rightarrow r = \frac{460.5}{\sin 36°} \approx 783.45 \ ft.$$

Por lo tanto la distancia total $590.66 + 783.45 = 1374.11 \ ft$.



Palabras Claves

Perímetro
Es la distancia alrededor de una figura. El perímetro de cualquier figura debe tener una unidad de medida. Si no hay unidades específicas (pies, pulgadas, centímetros, etc.), escriba "unidades".

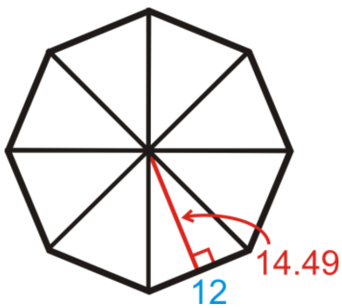
Área
Es la cantidad de espacio dentro de una figura. El área se mide en unidades cuadradas.

El ***centro*** y el ***radio*** de un polígono regular es el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.

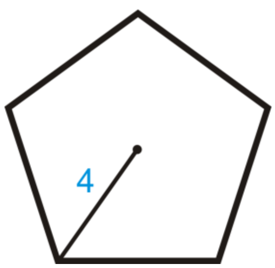
Un ***apotema*** es un segmento de recta trazada desde el centro de un polígono regular con el punto medio de uno de sus lados.

Ejercicios Resueltos

1. Encuentra el área del octógono regular en el ejemplo C.



2. Encuentra el área del polígono regular de radio 4.



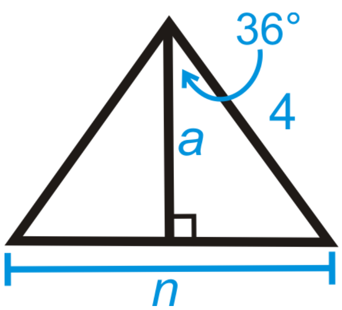
3. El área de un hexágono regular es $54\sqrt{3}$ y el perímetro es 36. Encontrar la longitud de los lados y la apotema.

Respuestas:

1. El octógono se puede dividir en 8 triángulos congruentes. Por lo tanto si encontramos el área de un triángulo y multiplicamos por 8 tendremos el área de todo el octágono.

$$A_{octagon} = 8\left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14.49\right) = 695.52 \ units^2$$

2. En éste problema tenemos que encontrar la apotema y la longitud de una cara antes de que podamos encontrar el área de todo el polígono. Cada ángulo central de un pentágono regular es $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Utilizamos la mitad de esto para hacer un triángulo rectángulo con la apotema. Esto significa que utilizaremos 36° Tenemos que utilizar seno y coseno.



$$\begin{aligned} \sin 36^\circ &= \frac{.5n}{4} \\ 4\sin 36^\circ &= \frac{1}{2}n \\ 8\sin 36^\circ &= n \\ n &\approx 4.7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos 36^\circ &= \frac{a}{4} \\ 4\cos 36^\circ &= a \\ a &\approx 3.24 \end{aligned}$$

Utilizando éstas dos piezas de información ahora podemos encontrar el área. $A = \frac{1}{2}(3.24)(5)(4.7) \approx 38.07 \ units^2$.

3. Conecta lo que sabes de las fórmulas de área y perímetro para resolver la longitud de un lado y la apotema.

$$P = sn \qquad\qquad A = \frac{1}{2}aP$$

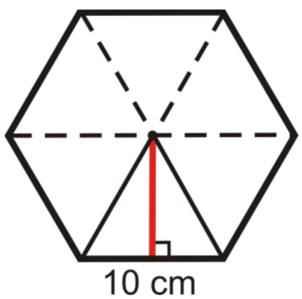
$$36 = 6s \qquad\qquad 54\sqrt{3} = \frac{1}{2}a(36)$$

$$s = 6 \qquad\qquad 54\sqrt{3} = 18a$$

$$3\sqrt{3} = a$$

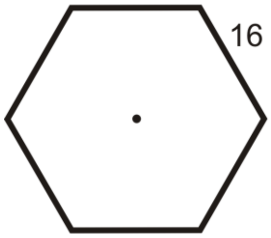
Ejercicios

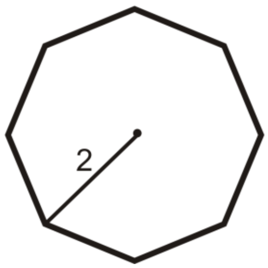
Utiliza el hexágono regular de abajo para contestar las siguientes preguntas. Cada lado tiene 10 cm de largo.

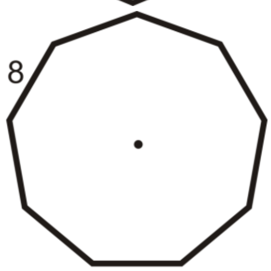


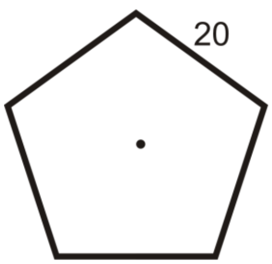
1. Cada segmento de la línea punteada es $a(n)$_______________.
2. El segmento de la línea roja es $a(n)$_________________.
3. Hay _____ triángulos congruentes en un hexágono regular.
4. En un hexágono regular todos los triángulos son ________________.
5. Encontrar el radio de este hexágono.
6. Encuentre la apotema.
7. Halla el perímetro.
8. Encuentra el área.

Encuentra el área y el perímetro de cada uno de los siguientes polígonos regulares. Redondea tu respuesta a la centésima más cercana.

9. 

10. 

11. 

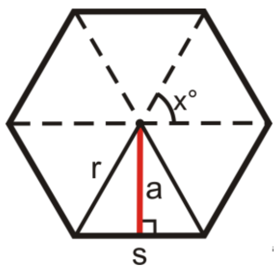
12. 

13. Si el perímetro de un decágono regular es 65, ¿cuál es la longitud de cada lado?
14. Un polígono regular tiene un perímetro de 132 y los lados miden 11 unidades de largo. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
15. El área de un pentágono regular es $440.44\ in^2$ y el perímetro es de 80 cm. Encontrar la longitud de la apotema del pentágono.
16. El área de un octógono regular es $695.3\ cm^2$ y los lados son 12 cm. ¿Cuál es la longitud de la apotema?

Un regular 20-gono y un regular 40-gono se inscriben en un círculo con un radio de 15 unidades.

17. ***Desafío*** derivar una fórmula para el área de un hexágono normal con lados de longitud s. La única variable será s. SUGERENCIA: Utiliza la relación 30-60-90 para los triángulos.

Desafío en los siguientes pasos deberá derivar una fórmula alternativa para hallar el área de un polígono regular con n lados. Vamos a empezar por pensar en un polígono con n lados y n triángulos isósceles congruentes. Vamos a encontrar la suma de las áreas de estos triángulos usando trigonometría. En primer lugar el área de un triángulo es $\frac{1}{2}bh$. En el diagrama de la derecha ésta fórmula de área sería $\frac{1}{2}sa$ donde s es la longitud de un lado y a es la longitud de la apotema. En el diagrama x representa la medida del ángulo del vértice de cada triángulo isósceles.



$n n \frac{1}{2}bh \frac{1}{2}sa \; sa x$

a. La apotema, a, divide el triángulo en dos triángulos congruentes. El ángulo de la parte superior de cada uno es $\frac{x^\circ}{2}$. Encuentra $\sin\left(\frac{x^\circ}{2}\right)$ y $\cos\left(\frac{x^\circ}{2}\right)$.

b. Resuelve tu ecuación de $\sin$ para encontrar una expresión para s en términos de r y x.

c. Resuelve tu ecuación de $\cos$ para encontrar una expresión para a en términos de r y x.

d. Sustituir estas expresiones en la ecuación para el área de uno de los triángulos, $\frac{1}{2}sa$.

e. Dado que habrá n triángulos en un n-gono, es necesario multiplicar la expresión de la parte d por n para obtener la superficie total.

f. ¿Cómo le explicarías a alguien para encontrar el valor de x un polígono regular?

Utiliza la fórmula que derivó en el problema 18 para hallar el área de los polígonos regulares descritos en los problemas 19 a 22. Redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

19. Decágono con radio de 12 cm.

20. 20-gono con radio de 5 pulgadas

21. 15-gono cuya longitud de radio es 8 cm.

22. 45-gono con longitud de radio 7 pulgadas