

CUADRADO DE UNA SUMA, CUADRADO DE UNA DIFERENCIA Y PRODUCTO DE UNA SUMA POR SU DIFERENCIA

Supón que la entrada de la casa de un perro es un cuadrado con una altura de x unidades y un ancho de x unidades. Debido a que tu cachorro creció, es necesario aumentar la altura y el ancho por 4 unidades. ¿Cuál sería el área resultante de la entrada nueva? Si la altura se ha incrementado en 4 unidades y el ancho se ha reducido en 4 unidades, ¿Cuál sería el área entonces? En esta lección aprenderás sobre diversos productos notables y podrás resolver problemas como éste.



Al multiplicar dos binomios lineales (de 1er orden), creas un polinomio de segundo grado (de 2do orden) con cuatro términos. Los términos del medio los combinas para formar una ecuación de 2do grado, un trinomio.

Encontrar el cuadrado de un binomio

Un producto notable es el **cuadrado de un binomio**. Considera la siguiente multiplicación: $(x + 4)(x + 4)$. Estas multiplicando la expresión por sí misma. Esto significa que:

$$(x + 4)(x + 4) = (x + 4)^2$$

$$(x + 4)(x + 4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$$

Esto sigue el patrón general de la siguiente regla.

Cuadrado de un binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ten cuidado con el error común que se comete $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. ¡Esto no es verdad!

Ejemplo A

Resuelve: $(x + 10)^2$.

Respuesta: Utiliza el cuadrado de un binomio, sustituyendo $a = x$ y $b = 10$ en la fórmula.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + 10)^2 = (x)^2 + 2(x)(10) + (10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

Encontrar el producto de una suma por su diferencia

Otro producto notable es el producto de una suma por su diferencia. Por ejemplo, multiplica los siguientes binomios.

$$\begin{aligned}(x + 4)(x - 4) &= x^2 - 4x + 4x - 16 \\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

Ten en cuenta que los términos medios son opuestos el uno del otro, por lo que se cancelan cuando combinas los términos semejantes. Esto siempre ocurre si multiplicas una suma por su diferencia.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Al multiplicar una suma por su diferencia, los términos medios se cancelan. Tienes el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término. Debes recordar la siguiente fórmula.

Fórmula de una suma por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplo B

Multiplica los siguientes binomios.

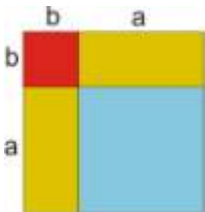
$$(5x + 9)(5x - 9)$$

Respuesta: Utiliza la fórmula anterior con $a = 5x$ y $b = 9$.

$$(5x + 9)(5x - 9) = (5x)^2 - (9)^2 = 25x^2 - 81$$

Solución de problemas del mundo real con lo aprendido

Ahora vas a ver cómo los productos notables se pueden aplicar para resolver problemas de geometría y aritmética mental. Observa los siguientes ejemplos.



Ejemplo C

Encuentra el área del cuadrado.

Respuesta: Área del cuadrado = lado x lado.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Ten en cuenta que esto da una explicación visual al cuadrado de un binomio.

El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar los productos notables para hacer cálculos mentales rápidos.

Ejemplo D

Encuentra el producto para ambos casos sin usar una calculadora.

(A) 43×57

(B) 45^2

Respuesta: La clave de estos "trucos" mentales es volver a escribir la multiplicación como un producto notable que ya conoces para poder resolverlo más rápido aplicando las fórmulas.

(A) Vuelve a escribir $43 = (50 - 7)$ y $57 = (50 + 7)$.

Entonces, $43 \times 57 = (50 - 7)(50 + 7) = (50)^2 - (7)^2 = 2500 - 49 = 2,451$.

(B) $45^2 = (40 + 5)^2 = (40)^2 + 2(40)(5) + (5)^2 = 1600 + 400 + 25 = 2,025$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Multiplica $(2x + 3y)(2x - 3y)$. Con el fin de ver cómo nos resuelve la vida utilizar productos notables, vamos a aplicar la propiedad distributiva primero.

$$\begin{aligned}(2x + 3y)(2x - 3y) &= \\ 2x(2x - 3y) + 3y(2x - 3y) &= \\ 2x(2x) + 2x(-3y) + 3y(2x) + 3y(-3y) &= \\ 4x^2 - 6xy + 6xy - 9y^2 &= \\ 4x^2 - 9y^2 &= \end{aligned}$$

Observa cómo los dos **términos medios** se cancelan mutuamente. Esto siempre ocurre, porque estamos multiplicando una suma por su diferencia. Compara la respuesta anterior con la que obtendremos aplicando el producto notable:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \Rightarrow (2x+3y)(2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 2^2x^2 - 3^2y^2 = 4x^2 - 9y^2$$

Las dos respuestas son iguales. Puedes utilizar el producto de una suma por su diferencia como un acceso directo y así no tendrás que utilizar la propiedad distributiva todo el tiempo.

Respuesta: $4x^2 - 9y^2$

2. Resuelve los productos notables. $(x + 9)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 9 + 9^2 = x^2 + 18x + 81$

Respuesta: $x^2 + 18x + 81$

3. Resuelve los productos notables. $(x - 1)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$

Respuesta: $x^2 - 2x + 1$

4. Resuelve los productos notables. $(2y + 6)^2 = (2y)^2 + 2(2y)6 + 6^2 = 4y^2 + 24y + 36$

Respuesta: $4y^2 + 24y + 36$

5. Resuelve los productos notables. $(3x - 7)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 7 + 7^2 = 9x^2 - 42x + 49$

Respuesta: $9x^2 - 42x + 49$

6. Resuelve los productos notables. $(4x^2 + y^2)^2 = (4x^2)^2 + 2(4x^2)(y^2) + (y^2)^2 = 16x^4 + 8x^2y^2 + y^4$

Respuesta: $16x^4 + 8x^2y^2 + y^4$

7. Resuelve los productos notables.
 $(2x - 1)(2x + 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$
Respuesta: $4x^2 - 1$
8. Resuelve los productos notables.
 $(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 9$
Respuesta: $4x^2 - 9$
9. Resuelve los productos notables.
 $(4 + 6x)(4 - 6x) = 4^2 - (6x)^2 = 16 - 36x^2$
Respuesta: $16 - 36x^2$
10. Resuelve los productos notables.
 $(a^3 - 7)^2 = (a^3)^2 - 2a^3 \cdot 7 + 7^2 = a^6 - 14a^3 + 49$
Respuesta: $a^6 - 14a^3 + 49$

Profesor Danesa Padilla

Versión Fecha 2015-08-19

Glosario

Cuadrado de un binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Producto de una suma por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Otras Referencias

<http://www.profesorenlinea.cl/matematica/AlgebraProductosnotables.htm>

