GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #40.
Tema: Coordenadas.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Por coordenadas se entiende las magnitudes utilizadas para localizar un punto en un sistema de coordenadas, bien sea en un plano, en un espacio tridimensional o en un espacio de $\boldsymbol{n}$ dimensiones. Las coordenadas a lo largo de un eje deben preservar la posición relativa de espacios entre puntos; es decir, si un punto se encuentra entre otros dos en el espacio, las magnitudes de las coordenadas correspondientes deberían reflejar este hecho.

La proyección de un punto sobre un eje de coordenada es meramente la coordenada del punto correspondiente a ese eje. Así, la proyección de $(3,5)$ sobre el eje de las $\boldsymbol{x}$ es 3 y sobre el eje de las $\boldsymbol{y}$ es 5. La proyección de un segmento de línea recta $\boldsymbol{AB}$ sobre una de las coordenadas es el segmento de línea obtenido al proyectar los puntos extremos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ y luego se identifican las líneas segmentos entre los puntos proyectados.

Para encontrar el punto medio entre dos puntos se hace lo mismo que para encontrar el punto medio de un segmento de línea entre dos puntos, y ésto es lo mismo que que encontrar los puntos medios de las proyecciones del segmento de línea sobre cada uno de los ejes de coordenadas. Así, que dados los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto medio se obtiene al encontrar los puntos medios sobre los dos ejes, como sigue:

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Para encontrar un punto cualquiera x_m entre x_1 y x_2, tal que la distancia entre x_m y x_1 es ***a*** y entre x_m y x_2 es ***b***, se utiliza la ecuación:

$$\frac{x_m-x_1}{x_2-x_m}=\frac{a}{b}=\lambda\Rightarrow x_m-x_1=\lambda\left(x_2-x_m\right)=\lambda x_2-\lambda x_m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_m+\lambda x_m=x_1+\lambda x_2\Rightarrow x_m\left(1+\lambda\right)=x_1+\lambda x_2\Rightarrow x_m=\frac{x_1+\lambda x_2}{\left(1+\lambda\right)}$$

De igual manera se puede demostrar que:

$$y_m=\frac{y_1+\lambda y_2}{\left(1+\lambda\right)}$$

Encontrar la distancia entre dos puntos $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$ está dada por la ecuación siguiente basada en el teorema de Pitágoras:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

La pendiente de una línea recta es el cambio de altura vertical provocado por un desplazamiento horizontal específico. Dados dos puntos sobre una misma línea recta, $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$, la pendiente de la línea recta está dada por:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

La pendiente de una línea recta puede también ser definida como la tangente del ángulo que la línea recta forma cuando cruza el eje de las ***x***. Basado en este hecho, dadas las pendientes de dos líneas rectas, es posible calcular el ángulo hecho a la intersección de las dos líneas. Para resolver este problema se utilizará una identidad trigonométrica; es decir que si m_1 y m_2 son las pendientes de las dos líneas, estos valores son iguales a $tg\alpha_1$ y $tg\alpha_2$, donde α_1 y α_2 son los respectivos ángulos de intersección de las dos líneas con el eje de las ***x***. El ángulo de intersección puede ser calculado con la fórmula:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$tg\theta = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + \left(tg\alpha_1\right)\left(tg\alpha_2\right)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + \left(m_1\right)\left(m_2\right)} =$$

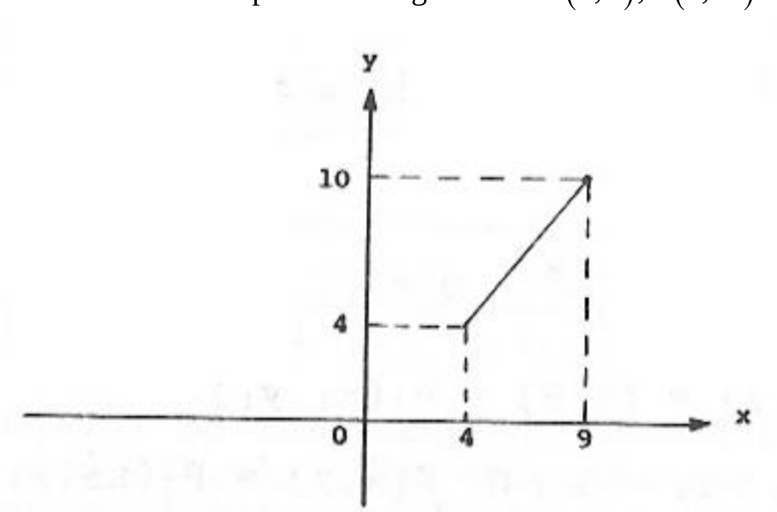
Tres puntos en el espacio se dicen que son colineales si todos pertenecen a la misma línea recta. Se puede determinar si varios puntos son colineales de varias maneras. Si ***A, B*** y ***C*** son puntos tales que la proyección de ***B*** sobre el eje de las ***x*** yace entre las proyecciones de ***A*** y ***C***; entonces, ***A, B*** y ***C*** son colineales., o sea, si:

$$|AB| + |BC| = |AC|$$

Otra manera de determinar si tres puntos son colineales, es que normalmente tres puntos en el mismo plano forman un triángulo el cual tiene un área, si el área que forman los tres puntos es igual a cero, el triángulo no existe y, los tres puntos están todos sobre la misma línea recta. Un último método para determinar si tres puntos son colineales es que partiendo del mismo punto las pendientes que forma ese punto con los otros dos son iguales.

PREGUNTAS:

1.- Encontrar las proyecciones de ***AB*** sobre los ejes de coordenadas, siendo las coordenadas de los puntos los siguientes: $A(4,4); B(9,10)$.



Por definición, la proyección del segmento de línea recta $\overline{P_1P_2}$ el cual une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ sobre el eje de las ***x*** es $(x_2 - x_1)$, y sobre el eje de las ***y*** es $(y_2 - y_1)$. Entonces las proyecciones buscadas serán:

Eje de las $\boldsymbol{x}$: $(9-4)=5$.

Eje de las $\boldsymbol{y}$: $(10-4)=6$.

2.- Encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide los siguientes segmentos en las razones dadas:

(a).- $P_1(4,4)$ y $P_2(8,8)$ con $\frac{r_1}{r_2}=\frac{-1}{2}=\lambda=-\frac{1}{2}$

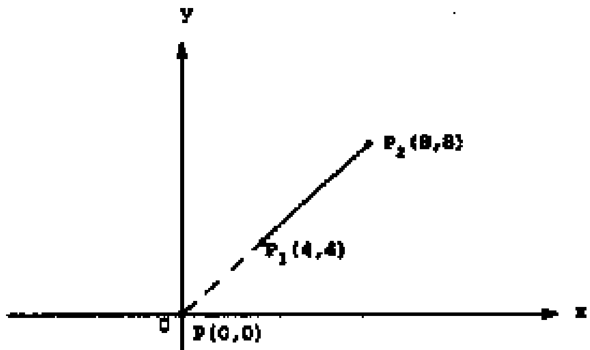


Fig. 1

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+\left(-\frac{1}{2}\right)8}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4-4}{\frac{1}{2}}=2(0)=0$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+\left(-\frac{1}{2}\right)8}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=2(0)=0$$

(b).- $P_1(4,9)$ y $P_2(9,10)$ con $\frac{r_1}{r_2}=\lambda=\frac{0}{a}=0$

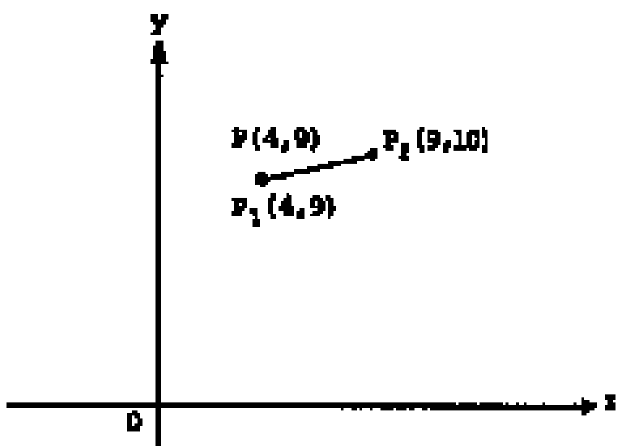


Fig. 2

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+(0)9}{1+0}=4=x_1$$

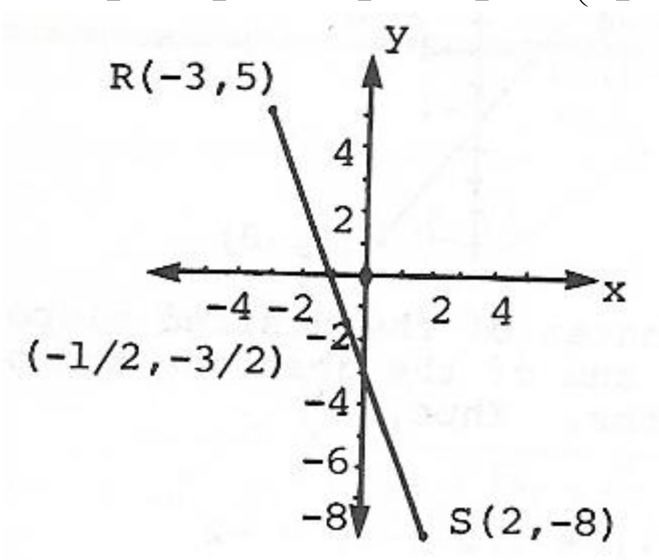
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{(1+\lambda)}=\frac{9+(0)10}{1+0}=9=y_1$$

3.- Encontrar el punto medio del segmento comprendido entre $R(-3,5)$ y $S(2,-8)$.

La fórmula para calcular el punto medio de un segmento, dadas las coordenadas de sus puntos extremos es la siguiente:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2};\, y_m=\frac{y_1+y_2}{2}$$ Entonces:

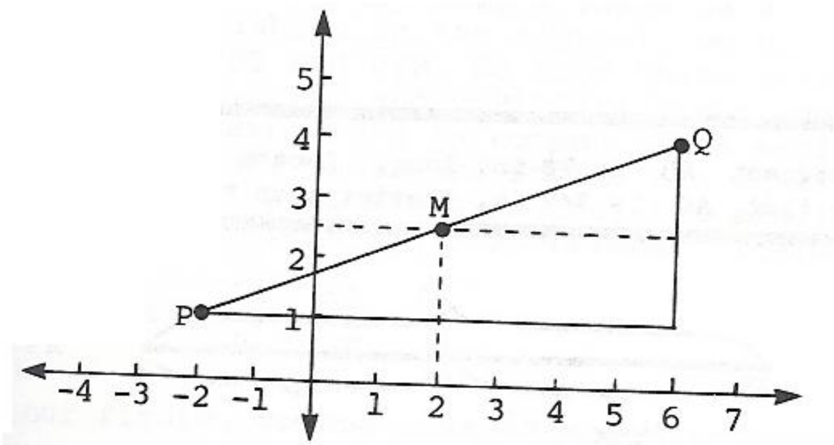
$$x_m=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2};\, y_m=\frac{5+(-8)}{2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow P_m\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$



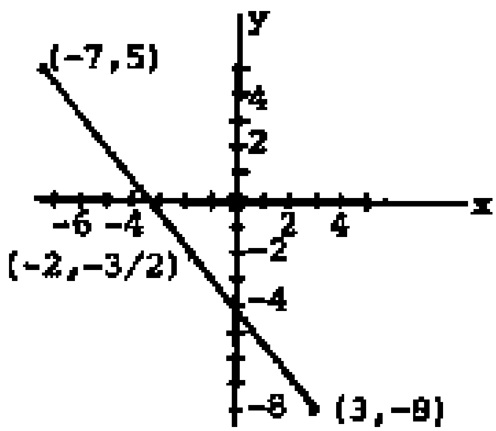
4.- ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento de línea recta cuyos extremos son $P(-2,1)$ y $Q(6,4)$?

Sea $M(x,y)$ el punto medio de un segmento de línea recta cuyos extremos son $P(-2,1)$ y $Q(6,4)$.

$$x_M = \frac{-2+6}{2} = 2; y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

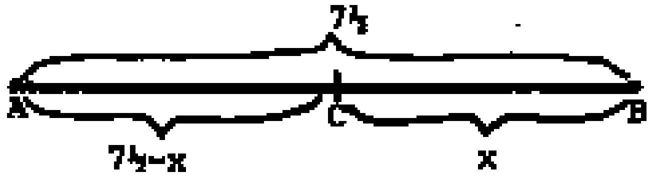


5.- Determine las coordenadas del punto medio del segmento de recta cuyos extremos son los puntos $A(3,-8)$ y $B(-7,5)$.



$$x_M = \frac{3+(-7)}{2} = -2; y_M = \frac{(-8)+5}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$$

6.- El segmento de línea recta ***AB*** tiene una longitud de $7\frac{1}{2}(pu\lg adas)$. Localizar el punto C, entre ***A*** y ***B*** de manera que ***AC*** es $\frac{3}{2}(pu\lg adas)$ más corto que dos veces ***CB***.

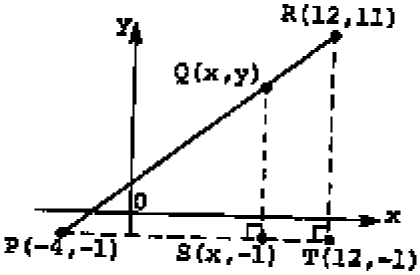


Sea $\boldsymbol{x}$ la longitud de $\boldsymbol{CB}$ en pulgadas. Entonces, $\left(7\frac{1}{2}-x\right)$ es la longitud de $\boldsymbol{AC}$ y ya sabemos que $\boldsymbol{AC}$ es $\frac{3}{2}\left(pu\lg adas\right)$ más corto que dos veces $\boldsymbol{BC}$. Entonces, podemos escribir que:

$$7\frac{1}{2}-x=2x-3\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{15}{2}-x=2x-\frac{3}{2}\Rightarrow x=3\Rightarrow CB=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC=7\frac{1}{2}-3=4\frac{1}{2}\left(pu\lg adas\right)$$

7.- Encontrar el punto Q que se encuentra a $\frac{3}{4}$ de la longitud del punto $P\left(-4,-1\right)$ al punto $R\left(12,11\right)$ a lo largo del segmento PR.

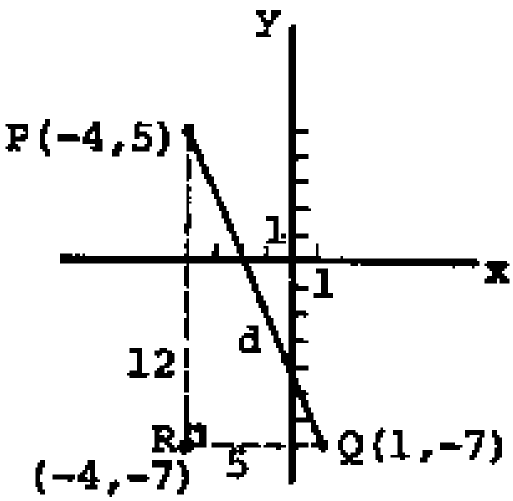


El problema consiste en encontrar las coordenadas del punto Q. Sabemos que $\overline{PQ}=\frac{3}{4}$ y por lo tanto $\overline{QR}=\frac{1}{4}$; de donde $\lambda=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$

$$x_Q=\frac{x_1+\lambda x_2}{\left(1+\lambda\right)}=\frac{-4+\left(3\right)\left(12\right)}{1+3}=\frac{32}{4}=8$$

$$y_Q=\frac{y_1+\lambda y_2}{\left(1+\lambda\right)}=\frac{-1+\left(3\right)\left(11\right)}{1+3}=\frac{32}{4}=8$$

8.- Encontrar la longitud del segmento de recta comprendido entre $P(-4,5)$ y $Q(1,-7)$, basándose en la información suministrada por la gráfica siguiente.



De la gráfica concluimos que se cumple:

$$\left(\overline{PR}\right)^2+\left(\overline{RQ}\right)^2=\left(\overline{PQ}\right)^2 \Rightarrow (12)^2+(5)^2=144+25=169$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{169}=13$$

9.- ¿Cuál es la distancia entre los puntos $(2,3)$ y $(7,11)$?

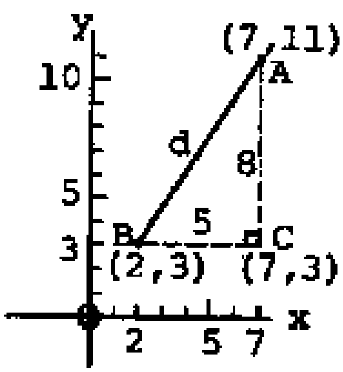


Fig. A

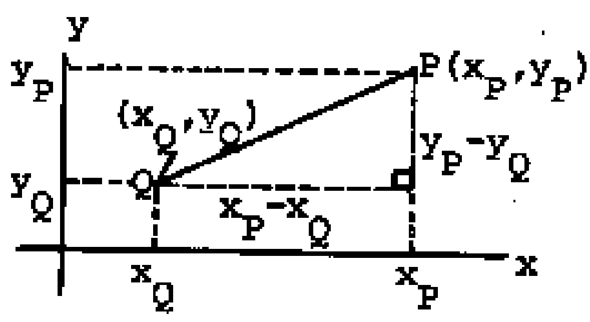


Fig. B

Observando la figura A, el triángulo ABC:

$$\left(\overline{BC}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2=\left(\overline{AB}\right)^2\Rightarrow(5)^2+(8)^2=25+64=89\Rightarrow$$
$$\left(\overline{AB}\right)=\sqrt{89}$$

Generalizando, podemos observar la figura B, con los puntos P y Q:

$$d_{(P,Q)}=\sqrt{\left(x_P-x_Q\right)^2+\left(y_P-y_Q\right)^2}$$

10.- Encontrar la distancia que existe del origen de coordenadas cartesianas al punto (x,y).

Si denominamos $P_1(0,0)$ y $P_2(x,y)$, entonces:

$$d_{(P_1,P_2)}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

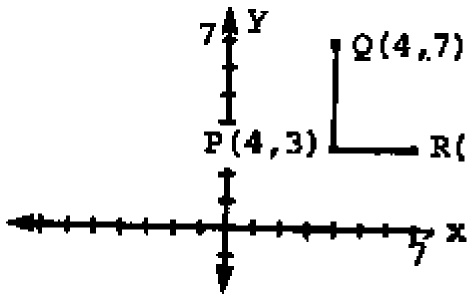
11.- Encontrar la distancia y la pendiente entre los siguientes puntos:
$(3,-5)$
$(2,4)$

Hagamos $P_1(x_1,y_1)\equiv(3,-5)$ y $P_2(x_2,y_2)\equiv(2,4)$

Luego: $d_{(P_1,P_2)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-3)^2+(4+5)^2}=\sqrt{82}$

Para la pendiente: $m_{(P_1,P_2)}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4+5}{2-3}=-9$

11.- Dados los puntos $P(4,3);Q(4,7);R(7,3)$, encontrar las longitudes de $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$.



Los puntos ***P*** y ***Q*** tienen la misma abscisa y por lo tanto su distancia es igual a:

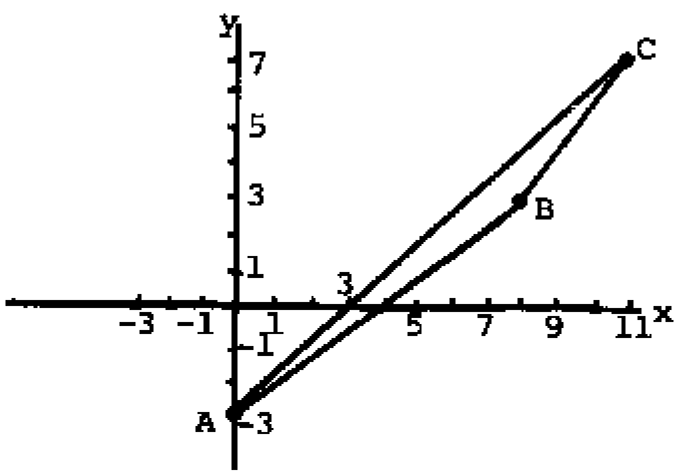
$$d_{(P,Q)} = \left| y_P - y_Q \right| = \left| 3 - 7 \right| = 4$$

Los puntos ***P*** y ***R*** tiene la misma ordenada y por lo tanto su distancia es igual a:

$$d_{(P,R)} = \left| x_P - x_R \right| = \left| 4 - 7 \right| = 3$$

12.- Usando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, demostrar que los tres puntos siguientes son colineales:

$$A(0,-3); B(8,3); C(11,7)$$



Tres puntos son colineales si los tres pertenecen a la misma línea recta. Eso quiere decir que en este caso, se debería cumplir que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$d_1 = \overline{AB} = \sqrt{(8-0)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$d_2 = \overline{AC} = \sqrt{(11-0)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{210} \approx 14,74$$

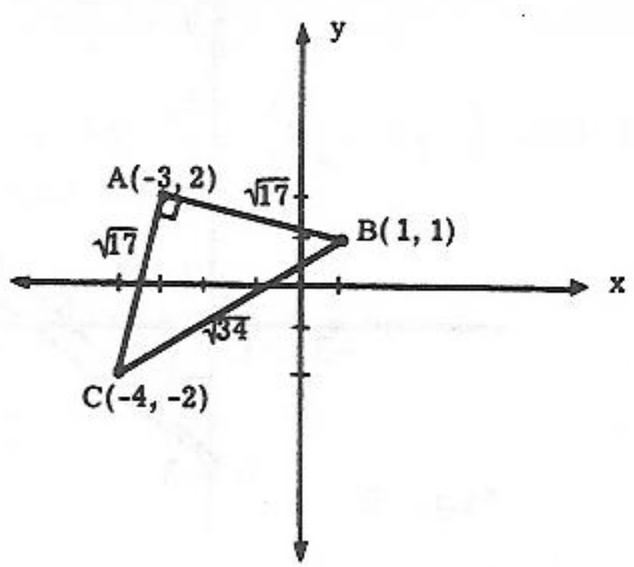
$$d_3 = \overline{BC} = \sqrt{(11-8)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Entonces:

$$d_1 + d_3 \neq d_2$$

Como se puede ver en la gráfica los tres puntos no son colineales y forman un triángulo.

13.- Demostrar que el triángulo conformado por $A(-3,2); B(1,1); C(-4,-2)$ es un triángulo isósceles.



$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(1+3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-4+3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-4-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{34}$$

Nótese que el triángulo es definitivamente isósceles porque $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{17}$.

Pero, también, el triángulo es rectángulo, porque:

$\left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\sqrt{34}\right|^2 = \left|\sqrt{17}\right|^2 + \left|\sqrt{17}\right|^2$, o sea el $\angle A = 90^{\circ}$.

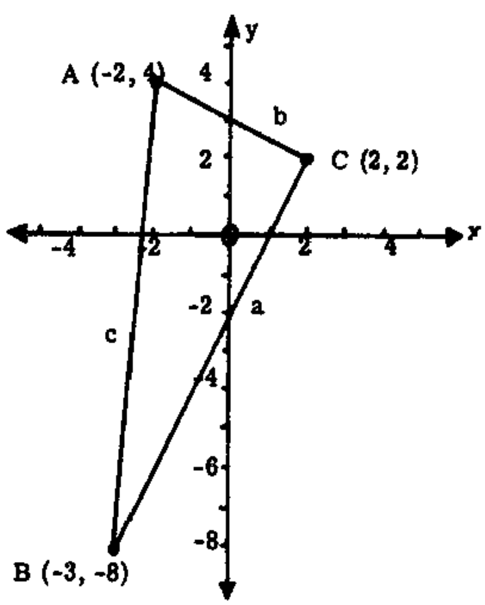
14.- Demostrar que los puntos $A(-2,4); B(-3,-8); C(2,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Si el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ es un triángulo rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Entonces, para resolver este problema se deberán calcular las distancias entre los puntos dados y comprobar luego si se cumple la relación matemática del teorema de Pitágoras.

$$d_{(B,C)} = \sqrt{\left[2-(-3)\right]^2 + \left[2-(-8)\right]^2} = \sqrt{125} = a$$

$$d_{(C,A)} = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} = b$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{\left[-3-(-2)\right]^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{145} = c$$

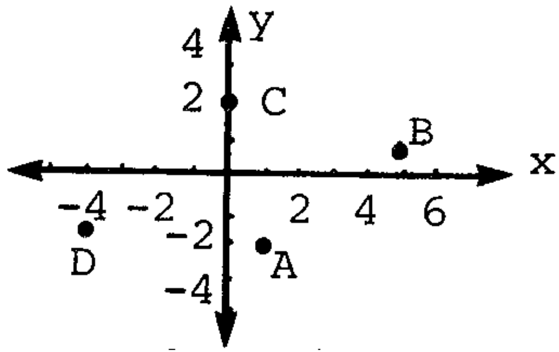


Conocidas loas distancias entre puntos se tratará de comprobar si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left(\sqrt{125}\right)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2 = 125 + 20 = 145 = c^2$$

La relación se cumple y por tanto el triángulo es rectángulo, siendo $\angle C = 90^{\circ}$.

15.- Grafique los puntos $A(1,-2);B(5,1);C(0,2)$ en unos ejes cartesianos. Si estos tres puntos son vértices de un paralelogramo, encontrar las coordenadas del cuarto vértice $\boldsymbol{D}$ en el tercer cuadrante.



$$m_{(B,C)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-1}{0-5}=-\frac{1}{5}$$

$$m_{(A,B)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-(-2)}{5-1}=\frac{3}{4}$$

Como es un paralelogramo, se debe cumplir que:

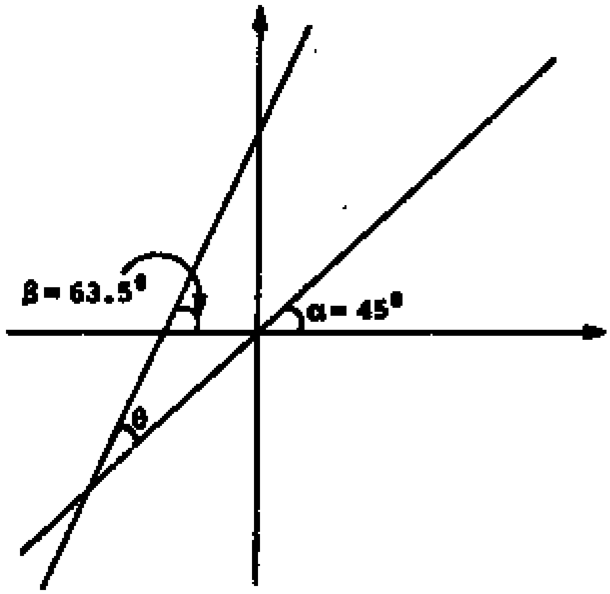
$$m_{(B,C)}=-\frac{1}{5}=m_{(A,D)}=\frac{y-(-2)}{x-1}\Rightarrow 1-x=5y+10\Rightarrow x+5y+9=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$m_{(A,B)}=\frac{3}{4}=m_{(D,C)}=\frac{2-y}{0-x}\Rightarrow -3x=8-4y\Rightarrow 3x-4y+8=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

O sea, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo (1) y (2):

$$D(-4,-1)$$

16.- Encontrar el ángulo de intersección de las dos rectas mostradas en la figura siguiente:



Llamemos: $l_2 \Rightarrow m_2 = tg\left(63,5^o\right) = 2; l_1 \Rightarrow m_1 = tg\left(45^o\right) = 1$

Luego: $tg\left(\theta\right) = \dfrac{m_2 - m_1}{1+\left(m_1\right)\left(m_2\right)} = \dfrac{2-1}{1+\left(1\right)\left(2\right)} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 18,4^o$

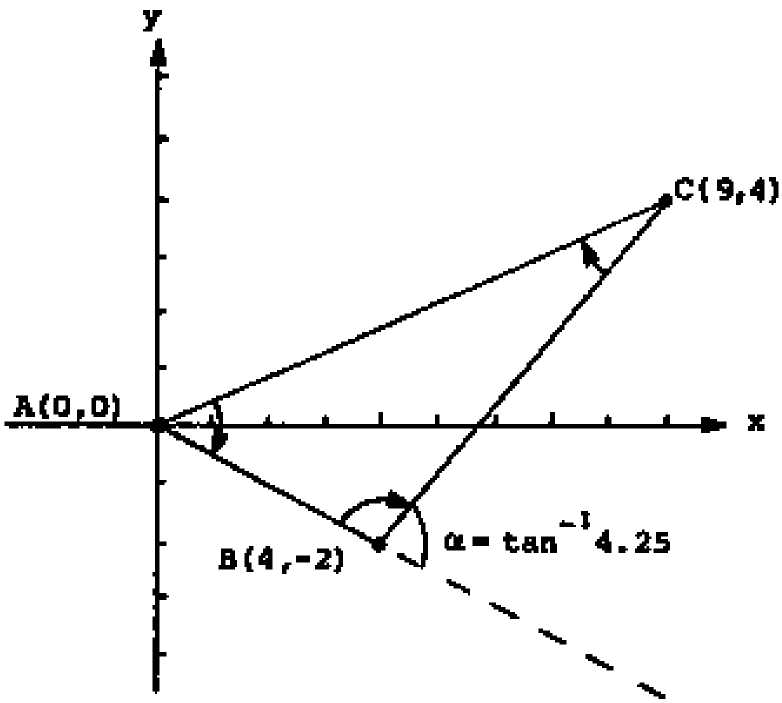
17.- Encontrar la pendiente de una línea recta l_2 la cual forma un ángulo de 30º con una línea l_1 d pendiente igual a 1.

Se parte de la fórmula: $tg\left(\theta\right) = \dfrac{m_2 - m_1}{1+\left(m_1\right)\left(m_2\right)} \Rightarrow tg\left(30^o\right) = \dfrac{m_2 - 1}{1+\left(1\right)\left(m_2\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Resolviendo: $m_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

18.- Encontrar el valor de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértice son:

$A\left(0,0\right); B\left(4,-2\right); C\left(9,4\right).$



Se comienza por calcular las pendientes de los tres lados del triángulo:

$$m_{(A,B)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{4-0} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{(A,C)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{9-0} = \frac{4}{9}$$

$$m_{B,C} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{9-4} = \frac{6}{5}$$

Luego:

$$tg(A) = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)} = \frac{m_{(A,C)} - m_{(A,B)}}{1+\left[m_{(A,C)}\right]\left[m_{(A,B)}\right]} = \frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{17}{14}$$

$$\angle A = tg^{-1}\left(\frac{17}{14}\right) = 50,5^{o} \Rightarrow \angle A = 50,5^{o}$$

También:

$$tg\left(C\right)=\frac{m_{(B,C)}-m_{(A,C)}}{1+\left[m_{(A,C)}\right]\left[m_{(B,C)}\right]}=\frac{\frac{6}{5}-\frac{4}{9}}{1+\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{4}{9}\right)}=0,49275$$

$$\angle C=tg^{-1}\left(0,49275\right)=26,2317^{o}$$

$$\angle B=180^{o}-\left[\angle A+\angle C\right]=180^{o}-\left(50,5^{o}+26,2317^{o}\right)=103,2683^{o}$$

Es una experiencia interesante calcular directamente el valor del ángulo ***B***:

$$tg\left(B\right)=\frac{m_{(A,B)}-m_{(B,C)}}{1+\left(m_{(A,B)}\right)\left(m_{(B,C)}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{5}\right)}=\frac{\frac{-5-12}{10}}{\frac{10-6}{10}}=\frac{-17}{4}=-4,25$$

Eso quiere decir que el ángulo ***B*** debe estar necesariamente en el segundo cuadrante.

$tg^{-1}\left(-4,25\right)=-76,76^{o}$ por lo que el ángulo buscado será:

$$\angle B=180^{o}-76,76^{o}=103,24^{o}$$