

Coordenadas de un vector en el plano

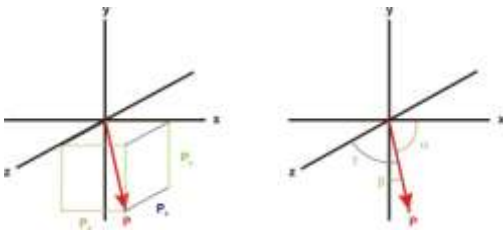
Marco Teórico

El vector \vec{OP} que une el origen de coordenadas O con un punto P se llama vector de posición del punto P.

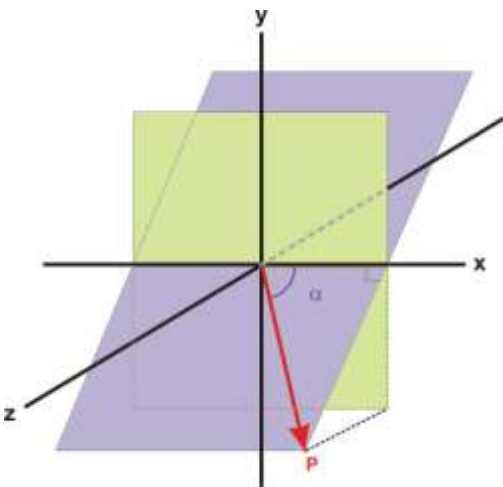
Recordemos que la ecuación para un vector viene dada por:

$$\vec{p} = \langle P_x, P_y, P_z \rangle$$

Donde P_x , P_y , y P_z son las coordenadas x, y, y z las coordenadas del vector obtenido mediante la proyección del vector sobre la X, Y, y Z como se muestra abajo a la izquierda.



La imagen de arriba a la derecha, muestra los ángulos entre el vector de posición, \vec{P} y los tres ejes: α es el ángulo entre \vec{P} y el eje x, β es el ángulo entre \vec{P} y el eje y, y γ es el ángulo entre \vec{P} y el eje z. El vector de posición, \vec{P} y el vector unitario, \hat{x} , definen un plano que se muestra a continuación:



El ángulo de la dirección, α , es el ángulo entre \vec{P} y \hat{x} en el plano definido por los dos vectores. El otro

plano que se muestra en el diagrama es el plano XY, que se incluyó en el diagrama para ayudarte a visualizar la orientación del plano definido por los vectores.

En nuestra discusión sobre el producto punto, vimos que el producto escalar de dos vectores se puede

$$\text{dar por } \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos \theta$$

Por lo tanto, podemos calcular el ángulo entre \vec{P} el vector y la unidad \hat{x} .

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{P} \cdot \hat{x}}{|\vec{P}|}$$

Del mismo modo, la dirección de los ángulos β y γ pueden calcularse utilizando las ecuaciones

$$\beta = \cos^{-1} \frac{\vec{P} \cdot \hat{y}}{|\vec{P}|} \quad \gamma = \cos^{-1} \frac{\vec{P} \cdot \hat{z}}{|\vec{P}|}$$

En algunas aplicaciones, tales como la astronomía y Óptica Aplicada, los cosenos de dirección se utilizan al menos tan frecuentemente como los propios ángulos direccionales.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \cdot \hat{x}}{|\vec{P}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{P} \cdot \hat{y}}{|\vec{P}|}, \quad \cos \gamma = \frac{\vec{P} \cdot \hat{z}}{|\vec{P}|}$$

Pitágoras propiedad de los cosenos de dirección

Una propiedad interesante de cosenos de dirección puede ser visto si escribimos las ecuaciones para los cosenos de dirección en términos de los componentes del vector de posición, P_x , P_y , y P_z y el uso de

$$\text{la definición de la magnitud del vector } |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Por ejemplo,

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

Los otros dos cosenos direccionales pueden reescribirse parecida:

$$\cos \beta = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} \quad \cos \gamma = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de las tres ecuaciones y luego sumarlos, obtenemos

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{P_x^2}{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} + \frac{P_y^2}{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} + \frac{P_z^2}{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

lo que simplifica a

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = 1$$

Este es un resultado importante debido a que la definición del vector unitario declaró que $|\hat{u}| = 1$

que también significa que:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

y que los componentes de los vectores unitarios corresponden a los cosenos de dirección.

Ejemplo A

Porque los aviones se mueven en tres dimensiones, los equipos de tierra con aviones pueden utilizar cosenos directores para identificar su ubicación en cualquier momento. En lugar de un conjunto arbitrario de x ortogonales, Y , y Z , la posición de un avión se mide en relación con el este, norte y direcciones cenit. (Zenith significa arriba o hacia arriba.) En un momento determinado, un pequeño avión es de 297 km al este, 135 km al norte, y 7,5 kilómetros sobre su aeropuerto de origen. ¿Cuáles son los cosenos direccionales y los ángulos de dirección para el vector de posición del avión en ese momento?

Solución

Si utilizamos la orientación estándar de los mapas en el hemisferio norte, la dirección x corresponde a este, la dirección y al norte, y la dirección z hacia el cenit. Por lo tanto, el vector de posición del avión puede ser escrito como $\vec{P} = \langle 297, 135, 7.5 \rangle$ km.

Los cosenos directores asociados con este vector se dan por:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \cdot \hat{x}}{|\vec{P}|} = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{297}{\sqrt{297^2 + 135^2 + 7.5^2}} = 0.582$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{P} \cdot \hat{y}}{|\vec{P}|} = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{135}{\sqrt{297^2 + 135^2 + 7.5^2}} = 0.811$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{P} \cdot \hat{z}}{|\vec{P}|} = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{7.5}{\sqrt{297^2 + 135^2 + 7.5^2}} = 0.045$$

Los ángulos de dirección son asociados

$$\alpha = \cos^{-1} 0.582 = 54.4^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1} 0.811 = 35.8^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1} 0.045 = 87.4^\circ$$

Ejemplo B

En un próximo episodio de un drama, un enjambre de insectos de efectos especiales molesta a uno de los investigadores después de que el descubrimiento de una víctima de asesinato en una zanja de drenaje. El animador utiliza vectores de posición para realizar un seguimiento de las posiciones de las plagas virtuales con respecto a un origen a la cabeza del investigador. Uno de estos insectos se encuentra en un punto a 33 cm en el frente, 52 cm a la izquierda y 18 cm por debajo de la punta de la nariz del investigador. ¿Cuáles son los cosenos de dirección de este insecto?

Solución

Cuando miramos a nuestro investigador, la dirección + x es a su izquierda, la dirección y + es hacia arriba de la nariz y la dirección + z se encuentra en frente de ella. El vector de posición de la mosquita puede

escribirse como $\vec{P} = \langle 33, 52, -18 \rangle$ cm.

Los cosenos directores asociados con este vector se dan por:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \cdot \hat{x}}{|\vec{P}|} = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{33}{\sqrt{33^2 + 52^2 + (-18)^2}} = 0.514$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{P} \cdot \hat{y}}{|\vec{P}|} = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{52}{\sqrt{33^2 + 52^2 + (-18)^2}} = 0.810$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{P} \cdot \hat{z}}{|\vec{P}|} = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{-18}{\sqrt{33^2 + 52^2 + (-18)^2}} = -0.281$$

Ejemplo C

Un astrónomo local utilizó los cosenos directores al programar el proyector en una nueva cúpula del planetario. El proyector en sí se encuentra en el centro de la cúpula, 2,5 m por encima del suelo. Él desea proyectar Mintaka, una de las estrellas del cinturón de Orión, en una posición de 12 m al sur y 2,3 m al este del proyector y 8,7 m por encima del suelo. ¿Cuál es la ecuación del vector de la unidad direccional que el astrónomo debe entrar en el equipo de proyección?

Solución

Podemos utilizar el mismo sistema de coordenadas que se utilizó en el ejemplo A anterior: \hat{x} = este, \hat{y} = norte, y \hat{z} = hacia arriba. El proyector en sí es el origen. En un sistema de coordenadas de este tipo, el vector de posición para Mintaka se convierte $\vec{P} = \langle 2.3, -12, (8.7 - 2.5) \rangle = \langle 2.3, -12, 6.2 \rangle$. Nótese que no usamos la posición de Mintaka encima del piso que la coordenada z. Por el contrario, puesto que el proyector es de 2,5 m por encima del suelo, teníamos que utilizar la diferencia entre la altura del techo y de la altura del proyector. Utilice la forma de componentes de la ecuación de coseno direccional para calcular los tres componentes del vector unitario.

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{2.3}{\sqrt{2.3^2 + (-12)^2 + 6.2^2}} = 0.168$$

$$\cos \beta = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{-12}{\sqrt{2.3^2 + (-12)^2 + 6.2^2}} = -0.876$$

$$\cos \gamma = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}} = \frac{6.2}{\sqrt{2.3^2 + (-12)^2 + 6.2^2}} = 0.453$$

Por lo tanto, la unidad de vector de posición está dada por $\hat{u} = \langle 0.168, -0.876, 0.453 \rangle$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar los componentes del vector de posición $\vec{P} = \langle 2.4, 5.3, 1.8 \rangle$ a continuación, determinar los ángulos de dirección entre este vector y el eje x.

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \times \hat{x}}{|\vec{P}|} = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \times \hat{x}}{|\vec{P}|} = \frac{2.4}{\sqrt{(2.4)^2 + (5.3)^2 + (1.8)^2}} = \frac{2.4}{\sqrt{5.76 + 28.09 + 3.24}} = \frac{2.4}{\sqrt{37.09}} = 0.394$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0.394 = 66.8$$

$$\alpha = 66.8$$

2. Determinar los cosenos directores del vector $\vec{N} = \langle 8, 3, -5 \rangle$

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \times \hat{x}}{|\vec{N}|} = \frac{N_x}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \times \hat{x}}{|\vec{N}|} = \frac{N_x}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}} = \frac{8}{\sqrt{(8)^2 + (3)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{64 + 9 + 25}} = 0.7213$$

$$\cos \alpha = 0.7213$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{N} \times \hat{y}}{|\vec{N}|} = \frac{N_y}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{N} \times \hat{y}}{|\vec{N}|} = \frac{N_y}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}} = \frac{3}{\sqrt{(8)^2 + (3)^2 + (-5)^2}} = \frac{3}{\sqrt{64 + 9 + 25}} = 0.3030$$

$$\cos \beta = 0.3030$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{N} \times \hat{z}}{|\vec{N}|} = \frac{N_z}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{N} \times \hat{z}}{|\vec{N}|} = \frac{N_z}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}} = \frac{-5}{\sqrt{(8)^2 + (3)^2 + (-5)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{64 + 9 + 25}} = -0.5051$$

$$\cos \gamma = -0.5051$$

3. Determinar el vector de posición de un pequeño avión en el momento en que está a 2,5 km al este, 8.8 km al sur, y 4,1 kilómetros sobre su aeropuerto de origen. Utilice un sistema de coordenadas donde la dirección x corresponde a este, la dirección y

Solución:

En este sistema de coordenadas, con un origen en el aeropuerto de origen, el vector de posición se da por $\vec{r} = \langle 2.5, -8.8, 4.1 \rangle$ con unidades de kilómetros.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \times \hat{x}}{|\vec{r}|} = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

hacia el norte, y la dirección z para el centro. A continuación, determinar los cosenos direccionales utilizados por el personal de control de tráfico aéreo para identificar la ubicación del avión.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \times \hat{x}}{|\vec{r}|} = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{2.5}{\sqrt{(2.5)^2 + (-8.8)^2 + (4.1)^2}} = \frac{2.5}{\sqrt{100.5}} = 0.249$$

$$\cos \alpha = 0.249$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{r} \times \hat{y}}{|\vec{r}|} = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{r} \times \hat{y}}{|\vec{r}|} = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{-8.8}{\sqrt{(2.5)^2 + (-8.8)^2 + (4.1)^2}} = \frac{-8.8}{\sqrt{100.5}} = -0.878$$

$$\cos \beta = -0.878$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{r} \times \hat{z}}{|\vec{r}|} = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{r} \times \hat{z}}{|\vec{r}|} = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{4.1}{\sqrt{(2.5)^2 + (-8.8)^2 + (4.1)^2}} = \frac{4.1}{\sqrt{100.5}} = 0.409$$

$$\cos \gamma = 0.409$$

4. Usar el método de cosenos de dirección para identificar el vector de unidad que tiene la misma dirección que el vector de posición $\vec{R} = \langle 791, 978, 1310 \rangle$

Solución:

El vector de unidad que tiene la misma dirección que este vector tiene los componentes

$$\hat{u} = \langle \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \rangle \text{ donde}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{R} \times \hat{x}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}, \cos \beta = \frac{\vec{R} \times \hat{y}}{|\vec{R}|} = \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{R} \times \hat{z}}{|\vec{R}|} = \frac{R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}.$$

Una vez que nos encontramos con los tres cosenos directores, tenemos los componentes del vector unitario,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{R} \times \hat{x}}{|\vec{R}|} = \frac{791}{\sqrt{791^2 + 978^2 + 1310^2}} = \frac{791}{\sqrt{3298265}} = \frac{791}{1816.11} = 0.436$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{R} \times \hat{y}}{|\vec{R}|} = \frac{978}{\sqrt{791^2 + 978^2 + 1310^2}} = \frac{978}{\sqrt{3298265}} = \frac{978}{1816.11} = 0.539$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{R} \times \hat{z}}{|\vec{R}|} = \frac{1310}{\sqrt{791^2 + 978^2 + 1310^2}} = \frac{1310}{\sqrt{3298265}} = \frac{1310}{1816.11} = 0.721$$

$$\hat{u} = \langle \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \rangle = \langle 0.436, 0.539, 0.721 \rangle$$

$$\hat{U} = 0.436, 0.539, 0.721$$

5. Determinar los ángulos de dirección entre el vector $\vec{p} = \langle 25, 8, 15 \rangle$ y los ejes de coordenadas.

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \times \hat{x}}{|\vec{P}|} = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \times \hat{x}}{|\vec{P}|} = \frac{25}{\sqrt{(25)^2 + (8)^2 + (15)^2}} = \frac{25}{\sqrt{914}} = \frac{25}{30.23} = 0.827$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0.827 = 34.2^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{P} \times \hat{y}}{|\vec{P}|} = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{P} \times \hat{y}}{|\vec{P}|} = \frac{8}{\sqrt{(25)^2 + (8)^2 + (15)^2}} = \frac{8}{\sqrt{914}} = \frac{8}{30.23} = 0.265$$

$$\beta = \cos^{-1} 0.265 = 75.7^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{P} \times \hat{z}}{|\vec{P}|} = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{P} \times \hat{z}}{|\vec{P}|} = \frac{15}{\sqrt{(25)^2 + (8)^2 + (15)^2}} = \frac{15}{\sqrt{914}} = \frac{15}{30.23} = 0.496$$

$$\gamma = \cos^{-1} 0.496 = 60.25^\circ$$

$$= 60, 25^\circ$$

6. Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{v} = (k, 3)$ es 5.

Solución:

$$5 = \sqrt{k^2 + 9} \quad 25 = k^2 + 9 \quad \mathbf{k = \pm 4}$$

7. Si \vec{v} es un vector de componentes (3, 4), hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

Solución:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 16}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{25}$$

$$|\vec{v}| = 5$$

$$\vec{w} = \frac{1}{5}(3, 4)$$

$$\vec{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

8. Las coordenadas de los extremos del segmento AB son: A (2, -1) y B (8, -4). Hallar las coordenadas del punto C que divide al segmento AB en dos partes tales que AC es la mitad de CB.

Solución:

$$\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$(x - 2, y + 1) = \frac{1}{2}(8 - x, -4 - y)$$

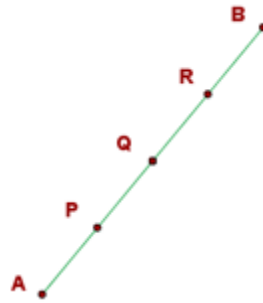
$$x - 2 = \frac{1}{2}(8 - x) \quad \mathbf{x = 4}$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(-4 - y) \quad \mathbf{y = -2}$$

$$\mathbf{C (4, -2)}$$

9. Si el segmento AB de extremos A (1, 3), B (7, 5), se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?

Solución:



Q es el punto medio del segmento AB

$$Q \left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2} \right)$$

$$= \mathbf{Q (4, 4)}$$

P es el punto medio del segmento AQ

$$P \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+4}{2} \right)$$

$$= \mathbf{P \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)}$$

R es el punto medio del segmento QB

$$R \left(\frac{4+7}{2}, \frac{4+5}{2} \right)$$

$$= \mathbf{R \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right)}$$

10. Hallar el simétrico del punto A (4, -2) respecto de M (2, 6).

Solución:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$$

$$(2 - 4, 6 + 2) = (x - 2, y - 6)$$

$$x - 2 = -2 \quad \mathbf{x = 0}$$

$$y - 6 = 8 \quad \mathbf{y = 14}$$

A' (0,14)

Profesor: Militza Indaburo

Fe y Alegría Versión: 2016-03-21

Glosario

El **vector unitario** define una dirección de aplicación de la fuerza con una magnitud de 1 unidad.

Notación de componentes se describe cada uno de los componentes x, y, y z del vector relevante.

Notación ángulo o **cosenos ángulo** describen un vector como el resultado de las magnitudes y las direcciones individuales, según lo determinado a partir de los ejes, comenzando en el origen

