

Combinación lineal de dos o más vectores

Marco Teórico

Se dice que un vector es combinación lineal de un conjunto de dos vectores u_1 y u_2 si existen un par de números reales k_1, k_2 tal que se cumpla que:

$$w = k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2$$

Tratemos de entender esto a través del siguiente ejemplo:

Consideremos los vectores $u=(3,4)$ y $v=(-1,-7)$

¿Qué vector se obtiene al realizar la siguiente operación?

$$2u + 3v$$

Llamemos w al vector que obtendremos, pudiéndose escribir que :

$$w = 2u + 3v = 2(3,4) + 3(-1,-7) = (6,8) + (-3,-21) = (6-3, 8-21) = (3,-13)$$

$$w = (3,-13)$$

Luego el vector $w = 2u + 3v$

Se dice entonces, que el vector w es una combinación lineal de los vectores u y v .

Dependencia e independencia lineal de vectores

La condición que deben cumplir dos vectores a y b para que uno de ellos sea combinación lineal del otro es que exista un número real k tal que $a = k \cdot b$. Esta igualdad sólo es posible si los vectores a y b tienen la misma dirección. Dos vectores que tienen la misma dirección siempre son **linealmente dependientes** y dos vectores que tienen distinta dirección siempre son **linealmente independientes**.

Definición

Dado un conjunto de vectores, se dice que son **linealmente dependientes** si uno cualquiera de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Dado un conjunto de vectores, se dice que son **linealmente independientes**, si ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.

1. Consideremos $u = (2, -7)$ y $v = (5, 3)$, calcular que se obtiene al realizar $3u + 4v$.

Solución:

$$w = 3u + 4v =$$

$$w = 3(2, -7) + 4(5, 3)$$

$$w = (6, -21) + (20, 12)$$

$$w = (6 + 20, -21 + 12)$$

$$w = (26, -9)$$

2. Consideremos $x = (3, -4)$ y $y = (2, -3)$, calcular que se obtiene al realizar $2x + 4y$.

Solución:

$$z = 2x + 4y =$$

$$z = 2(3, -4) + 4(2, -3)$$

$$z = (6, -8) + (8, -12)$$

$$z = (6 + 8, -8 + (-12))$$

$$z = (14, -20)$$

3. Consideremos $u = (3, -2)$ y $v = (2, 3)$, calcular que se obtiene al realizar $2u + 4v$.

Solución:

$$w = 3u + 4v =$$

$$w = 2(3, -2) + 4(2, 3)$$

$$w = (6, -4) + (8, 12)$$

$$w = (6 + 8, -4 + 12)$$

$$w = (14, 8)$$

4. Consideremos $u = (-2, 2)$ y $v = (2, 3)$, calcular que se obtiene al realizar $3u + 4v$.

Solución:

$$w = 3u + 4v =$$

$$w = 3(-2, 2) + 4(2, 3)$$

$$w = (-6, 6) + (8, 12)$$

$$w=(-6+8,6+12)$$

$$w=(2,18)$$

Solución:

$$w=4u+3v=$$

$$w=4(4,-6)+3(-1,3)$$

$$w=(16,-24)+(-3,9)$$

$$w=(16+(-3),-24+9)$$

$$w=(13,-15)$$

5. Consideremos $u = (4,-6)$ y $v = (-1,3)$, calcular que se obtiene al realizar $4u+3v$.

6. Dados los vectores $u=(-3,2)$; $v=(-2,-1)$ y $w=(-2,-3/4)$. Expresar w como combinación lineal de los vectores u y v

Solución:

De acuerdo con la definición de combinación lineal deben existir dos números reales k_1 y k_2 tales que se verifique lo siguiente:

$$w=k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2$$

$(-2,-3/4)=k_1(-3,2)+k_2(-2,-1)$ Sustituyendo por las componentes de los vectores.

$(-2,-3/4)=(-3k_1,2k_1)+(-2k_2,-k_2)$ producto de un número real por un vector.

$(-2,-3/4)=(-3k_1-2k_2,2k_1-k_2)$ Suma de las componentes de los vectores.

Si dos vectores son iguales sus componentes son iguales, pudiéndose escribir que:

$$-3k_1 - 2k_2 = -2 \text{ y } 2k_1 - k_2 = -3/4$$

Como este par de ecuaciones se verifica simultáneamente es necesario resolver el sistema para encontrar los valores de k_1 y k_2

Resolvemos el sistema por el método de reducción, multiplicando la segunda ecuación por -2.

$$\begin{cases} -3k_1 - 2k_2 = -2 \\ 2k_1 - k_2 = -\frac{3}{4} \quad (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3k_1 - 2k_2 = -2 \\ -4k_1 + 2k_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$-7k_1 = -1/2$$

$$k_1 = 1/14$$

Sustituyendo el valor de k_1 , en la primera

ecuación del sistema original tendremos que:

$$-3(1/14) - 2k_2 = -2 \implies -3/14 - 2k_2 = -2 \implies$$

$$-2k_2 = -2 + 3/14 \implies -2k_2 = -25/14 \implies k_2 = 25/28$$

Como vemos w ha sido expresado como combinación lineal de los vectores u y v

7. Dados los vectores $p=(2,-1)$; $q=(5,-2)$ y $r=(11,-1)$. verificar si son linealmente dependientes

Solución:

De acuerdo con la definición un vector puede ser expresado como combinación lineal de los demás. Intentemos expresar el vector r como combinación lineal de los otros dos:

Deben existir dos números reales k y h tales que $r=k.p+h.q$

$(11,-1)=k(2,-1)+h(5,2)$ Sustituyendo los vectores por sus componentes

$(11,-1)=(2k,-k)+(5h,2h)$ Producto de un número real por un vector

$(11,-1)=(2k+5h,-k+2h)$ Sumando las componentes de los vectores.

Aplicando la igualdad de componentes se tendrá que: $2k + 5h = 11$ y $-k + 2h = -1$. Este par de ecuaciones deben verificarse simultáneamente, razón por la cual debe resolverse el sistema.

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado, para los valores de h y k

$$\begin{cases} 2k + 5h = 11 \dots (I) \\ -k + 2h = -1 \dots (II) \end{cases}$$

Despejando k de la ecuación (II) se tiene que $k=2h+1 \dots (III)$

Sustituyendo este valor en la ecuación (I) se tiene que:

$$2(2h+1)+5h=11$$

$$4h+2+5h=11$$

$$9h=11-2$$

$$9h=9$$

$$h=1$$

Sustituyendo este valor de h en la expresión (III) se tiene que:

$$k=2.1+1=2+1=3$$

$$k=3$$

De esta forma expresar así un vector como combinación lineal de los otros dos, lo cual conduce a decir que los vectores p , q y r son linealmente dependientes.

- 8 Verificar la dependencia e independencia de los vectores $u=(-2,4)$ y $v=(-6,12)$

e Solución

Debemos ver si es posible expresar como combinación lineal de u . Para ello debemos escribir que:

$$v = k \cdot u$$

$(-6, 12) = k(-2, 4)$ sustituyendo los vectores por sus componentes

$(-6, 12) = (-2k, 4k)$ producto de un número real por un vector en el segundo miembro

$-2k = -6$ y $4k = 12$ Igualando componentes

$$\text{De } -2k = -6$$

$$k = -6/2$$

$$k = 3$$

$$\text{De } 4k = 12$$

$$k = 3$$

Hemos encontrado un valor de $k=3$ capaz de satisfacer a ambas ecuaciones.

Esto nos indica que los vectores u y v son linealmente dependientes.

Solución:

$$w = 3u + 4v =$$

$$w = 3(1, -6) + 4(-5, 3)$$

$$w = (3, -18) + (-20, 12)$$

$$w = (3 + (-20), -18 + 12)$$

$$w = (-17, -6)$$

- 9 Consideremos $u = (1, -6)$ y $v = (-5, 3)$, calcular que se obtiene al realizar $3u + 4v$.

Solución:

$$w = 2u + 5v =$$

$$w = 2(2, -7) + 5(5, 3)$$

$$w = (4, -14) + (25, 15)$$

$$w = (4 + 25, -14 + 15)$$

$$w = (29, 1)$$

- 10 Consideremos $u = (2, -7)$ y $v = (5, 3)$, calcular que se obtiene al realizar $2u + 5v$.

