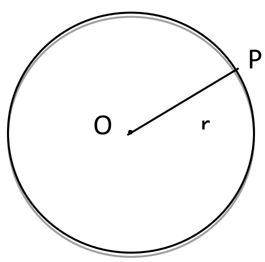
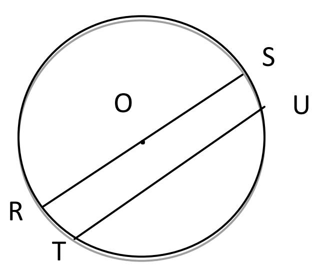
CIRCUNFERENCIA.
PERÍMETRO Y ÁREA DE UN CÍRCULO

¿Cómo harías para saber la longitud de la concha de la pizza? Una pizza grande tiene 35,5 cm de diámetro y se puede cortar en 8 o 10 pedazos, la concha representa la circunferencia de la pizza. Luego de entender este concepto sabrás cómo hallar la circunferencia de la pizza.

Una **circunferencia** es un conjunto de puntos de un plano cuya distancia a un punto fijo O (**Centro**) es constante.
Cualquier segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma se llama **radio.** En la siguiente figura la medida del segmento $\overline{OP}$ es un radio de la circunferencia de centro O es decir m ($\overline{OP}$)= r. Observe que el radio de una circunferencia entendido como un segmento o la longitud de un segmento no es único.



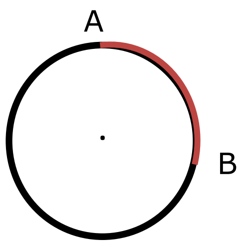
Se denomina **cuerda** a todo segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia



Una cuerda que pase por el centro de la circunferencia se denomina **diámetro**, así el segmento $\overline{RS}$ es un diámetro y es la cuerda de mayor longitud que puede tener la circunferencia. Es decir m ($\overline{RS}$)=D
Para definir la fórmula de la circunferencia, debemos determinar la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.

La región del plano formada por los puntos que forman la circunferencia y los puntos que están en el interior de la misma se denomina **Círculo**.

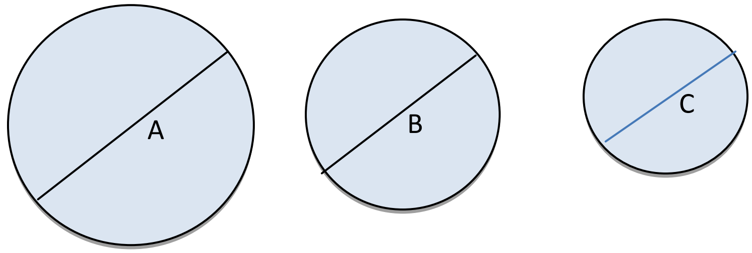
Arco
Es una porción de la circunferencia



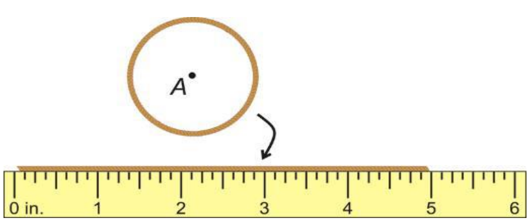
$\overset{\frown}{AB}$ se lee arco AB

Definiendo pi (π).

Herramientas necesarias: papel, lápiz, compás, regla, hilo y tijeras
1. Dibuja tres círculos con radios de 2 cm, 3 cm y 4 cm. Identifica los centros de cada círculo con las letras, A, B y C.
2. Dibuja los diámetros y determina su longitud. ¿Son iguales los diámetros de las circunferencias de centro A? B? y C ?



3. Agarra el hilo y colócalo sobre la línea que dibujaste del círculo con centro A, córtalo sin que sobre hilo. El hilo representa la circunferencia del círculo. Luego, estira el hilo sobre una regla y mide la longitud en cm. Redondea tu respuesta a la más cercana en cm cercana: Repite este procedimiento para los otros dos círculos.



4. Busca el valor de la circunferencia / diámetro en cada círculo. Escribe tus respuestas redondeando a la milésima más cercana. ¿Qué notas?

Luego de haber realizado el ejercicio, puedes ver que el valor de la relación circunferencia/ diámetro se acerca 3,14159... Cuanto más grande sea el diámetro, más cerca será la

aproximación a este número. Este número se llama $\boldsymbol{\pi}$, la letra griega "pi". Es un número irracional porque el decimal nunca se repite. Se ha calculado pi hacia el lugar millonésima y todavía no hay patrón en la secuencia de números. Para calcular la circunferencia o el área de círculos, debemos usar $\boldsymbol{\pi}$, o **"pi"** es la relación de la circunferencia de un círculo y su diámetro. Es aproximadamente igual a 3.14159265358979323846 ...
Se puede concluir que el valor de (circunferencia/ diámetro)= $\boldsymbol{\pi}$. En otras palabras, C= $\boldsymbol{\pi}$ D donde C= a la longitud de la circunferencia. Es decir

$\frac{C}{D}= \boldsymbol{\pi}=3.14159265358979323846$

También puedes decir que C= 2 $\boldsymbol{\pi}$ r porque D= 2r.
El **área** del círculo es la medida de la región encerrada por la circunferencia y la podemos calcular utilizando la relación
$A_o= \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^2 = \boldsymbol{\pi} \left(\frac{D}{2}\right)^2$ despejando r de D=2r luego $A_o = \boldsymbol{\pi} (D^2)/4$

Ejemplo A

Halla la circunferencia de un círculo con radio de 7 cm.
Utilizando la fórmula
C= 2 $\boldsymbol{\pi}$ (7)= 14 $\boldsymbol{\pi} \approx$ 44cm.
Puedes dejar la respuesta en términos de $\boldsymbol{\pi}$ o sustituir el valor y obtener una aproximación. Asegúrate de leer las instrucciones para determinar qué pide el problema.

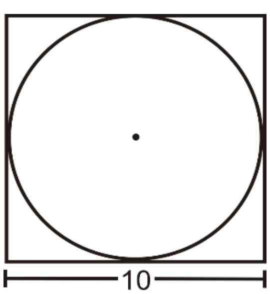
Ejemplo B

La circunferencia de un círculo es 64 $\boldsymbol{\pi}$, Busca el valor de su el diámetro.
Utiliza la fórmula de la circunferencia para encontrar el valor de D.

64 $\boldsymbol{\pi}$**=** $\boldsymbol{\pi}$D igualando términos D= 64

Ejemplo C

Un círculo está inscrito en un cuadrado cuyos lados miden 10 cm. ¿Cuál es la circunferencia de dicho círculo? Deja tu respuesta en términos de $\boldsymbol{\pi}$.

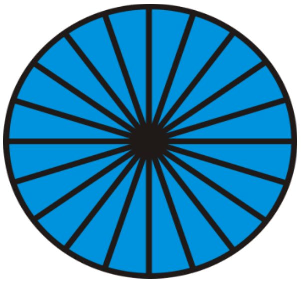


De la imagen, podemos ver que el diámetro del círculo es igual a la longitud de un lado del cuadrado. Utiliza la fórmula de la circunferencia para resolver el problema.

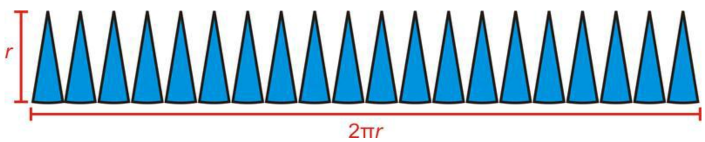
C= 10 $\boldsymbol{\pi}$cm

Área de un Círculo

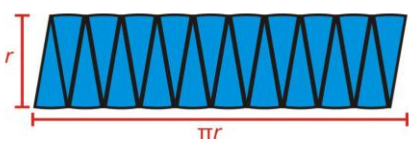
Recordemos que π es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Vamos a utilizar la fórmula de circunferencia para derivar la fórmula para el área.



Primero toma un círculo y divídalo en varios trozos o sectores. A continuación despliegue las cuñas para que estén en una sola línea con los puntos en la parte superior.



Nótese que la altura de las cuñas es r, el radio, y la longitud es la circunferencia del círculo. Ahora tenemos que tomar la mitad de estas cuñas, voltearlas boca abajo y colocarlas en la otra mitad para que todos encajen.



Ahora nuestro círculo se parece a un paralelogramo. El área de este paralelogramo es

$A= b.h= \pi r.r= \pi r^2$

La fórmula para el **área de un círculo** es $A= \pi r^2$ donde r es el radio del círculo.

Ejemplo A

Encontrar el área de un círculo con un diámetro de 12 cm.
Si el diámetro es de 12 cm entonces el radio es de 6 cm. El área es $A= \pi(6)^2=36\pi cm^2$.

Ejemplo B

Si el área de un círculo es $20\,\pi$, ¿cuál es el radio?

Hay que trabajar hacia atrás en éste problema. Conectar el área y luego resolver el radio.

$20\,\pi = \pi r^2$
$20 = r^2$
$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Al igual que la circunferencia dejaremos nuestras respuestas en términos de π a menos que se especifique lo contrario. En el ejemplo 2 el radio puede ser $\pm\, 2\sqrt{5}$. Sin embargo el radio es siempre positivo por lo que no necesita la respuesta negativa.

Ejemplo C

Un círculo está inscrito en un cuadrado. Cada lado del cuadrado es 10 cm de largo. ¿Cuál es el área del círculo?
El diámetro del círculo es la misma que la longitud de un lado del cuadrado. Por lo tanto el radio es la mitad de la longitud del lado o 5 cm.
$A_o = \pi r^2 = \pi(5)^2 = 25\,\pi cm^2$

O $A_o = \pi\, \mathbf{D^2}/4 = \pi\ (10)^2/4$
$A_{o=}\ \pi 100/4 = 25\pi cm^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Halla la longitud de la circunferencia de D=15 cm. ¿Se puede decir que la longitud de la circunferencia es igual que el perímetro del círculo? ¿Por qué?

$C= \boldsymbol{\pi}\mathbf{D}$
$C=15\boldsymbol{\pi} \approx 47.1cm$
El círculo es la región encerrada por la circunferencia por lo tanto ésta es su perímetro.

Respuesta: C= 47,1 cm

2. Los cauchos de un carro tienen un diámetro aproximado de 46cm. ¿Qué distancia recorre el carro si los cauchos giran una vez? ¿Qué distancia recorre el carro luego de que los cauchos hayan rotado 2.500 veces?

Un giro de un caucho equivale a la circunferencia. Esto sería $C= \boldsymbol{\pi}$ $D=46\boldsymbol{\pi} \approx 144,44cm$. Para calcular la distancia luego de 2500 rotaciones procedemos de la siguiente forma:
2500. 144,44= 361100

Respuesta: 361100 cm

3. Busca el radio del círculo cuya circunferencia mide 88 cm

C=88cm si $C= \pi D$ y $C= \boldsymbol{\pi}.2.r$ entonces
$88= 2\boldsymbol{\pi}.r$ despejando
$r= \frac{88}{2\boldsymbol{\pi}} = \frac{44}{\boldsymbol{\pi}} =14.01cm$

Respuesta: r=14,01 cm

4. Jaime está decorando una torta para el cumpleaños de un amigo. Le quiere poner gomitas en todo el borde de la torta, la torta tiene un diámetro de 30cm. Cada gomita tiene un diámetro de 1,25 cm. ¿Cuántas gomitas va a necesitar Jaime?

$C= \pi D$ $C=30$ π $C=94.2cm$
Si divido $\frac{94.2}{1,25} =75.36$ es decir

Respuesta: va a necesitar aproximadamente 75 gomitas

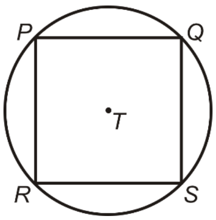
5. Se tiene un camión con ruedas de 66cm de diámetro.
a. ¿Cuánto se desplaza el camión cada vez que una rueda gira exactamente una vez?
b. ¿Cuántas veces giran las ruedas después de que el camión viaja 1 Km?

$C= \pi D = 66\ \pi \approx 207.24cm$
   a. Se desplaza 207.24cm cada vuelta.

Si llevamos cm a m tenemos 2,0724m que equivale a una vuelta, dividiendo 1Km= 1000m entre 2,0724m tenemos 482,53
   b. Las ruedas giran aproximadamente 482 veces

Respuesta: a. 207,24 cm y b. 482 veces

6. Determina el área del círculo si el segmento $\overline{PS}$ que une dos vértices del cuadrado inscrito en la circunferencia mide 8cm.



$A_o=\pi r^2$ si $\overline{PS}$ =8cm que equivale al diámetro de la circunferencia entonces el radio es igual a 4cm entonces
$A_o=\pi\ (4cm)^2=16\pi cm^2 \approx 50{,}24cm^2$

Respuesta: $A=50{,}24\ cm^2$

7. Dado el área de un círculo $A_o= 4\boldsymbol{\pi}\ cm^2$, determina su radio y su perímetro.

Si $A_o=\pi r^2$ luego $\pi r^2=4\pi$ simplificando
$r^2=4$ entonces r=2cm

Respuesta: r=2 cm

8. Determina la longitud de la circunferencia de una rueda de bicicleta de r=34cm

$C= \pi D= \pi 2r=68\pi \approx 213{,}52cm$

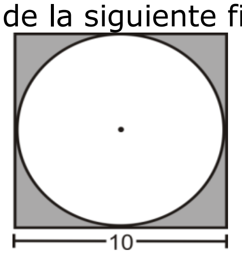
Respuesta: C=213,52 cm

9. Cuantas vueltas dará una rueda de 22cm de radio si recorre una distancia de 23500 cm.

$C= \pi D= \pi 2r=44\pi \approx 138{,}16cm$
dividiendo 23500 entre 138,16 tenemos da aproximadamente 170 vueltas

Respuesta: 170 vueltas

10. Encuentra el área de la región sombreada de la siguiente figura:



El área de la región sombreada sería el área del cuadrado menos el área del círculo.
$A_o=\pi r^2$
$A_o=10^2-25\boldsymbol{\pi}\mathbf{=}100-25\boldsymbol{\pi} \approx 21{,}46cm^2$

Respuesta: $A=21{,}46\ cm^2$

Profesor Danesa Padilla Versión 2015-05-24

Glosario

Un ***círculo*** es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto específico, llamado el ***centro***.

Un ***radio*** es la distancia desde el centro hasta el borde exterior del círculo.

Una ***cuerda*** es un segmento cuyos extremos están sobre el círculo.

Un ***diámetro*** es una cuerda que pasa a través del centro del círculo. La longitud de un diámetro es dos veces la longitud de un radio.

La ***circunferencia*** es la distancia alrededor de un círculo. π, o ***"pi"*** es la relación de la circunferencia de un círculo y su diámetro.

El **área** de un círculo es la medida de la región formada por el conjunto de puntos encerrados por una circunferencia y se mide en unidades cuadradas.

El **Arco** es una porción de la circunferencia

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/geo/eso/ac_5e.html