Materia: Matemática de Séptimo
Tema: Potenciación de Números Racionales - Exponentes con fracciones.

Si tuviéramos una expresión fraccionaria que contiene exponentes que fueron elevados a una potencia , como $\left(\frac{x^8}{x^4}\right)^5$ ¿Cómo puedes simplificarlo? Después de entender los conceptos que se explicarán, podrás simplificar expresiones exponenciales como esta..

Marco teórico

Cuando nos planteamos un cociente elevado a una potencia, se aplica la siguiente regla especial:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^4 &= \left(\frac{x^3}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{y^2}\right)\\ &= \frac{(x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x)}{(y\cdot y)\cdot(y\cdot y)\cdot(y\cdot y)\cdot(y\cdot y)}\\ &= \frac{x^{12}}{y^8}\end{aligned}$$

Observa que el exponente fuera de los paréntesis, se multiplica por el exponente en el numerador y el exponente en el denominador, también se multiplica por separado. Esto se llama la “potencia de un cociente” .

Regla de la potencia de cocientes: $\left(\frac{x^n}{y^m}\right)^p = \frac{x^{n\cdot p}}{y^{m\cdot p}}$

Vamos a aplicar esta regla a unos pocos ejemplos.

Ejemplo A

Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{4^5}{4^2}$

b) $\frac{5^3}{5^7}$

c) $\left(\frac{3^4}{5^2}\right)^2$

Solución

Como no son sólo números y no las variables, podemos evaluar las expresiones y deshacernos de los exponentes completamente.

a) Podemos utilizar la regla del cociente primero y luego evaluar el resultado: $\frac{4^5}{4^2}=4^{5-2}=4^3=64$

O podemos evaluar cada parte por separado y luego se divide: $\frac{4^5}{4^2}=\frac{1024}{16}=64$

b) Utiliza la regla del cociente primera y luego evalúa el resultado: $\frac{5^3}{5^7}=\frac{1}{5^4}=\frac{1}{625}$

O evalúa cada parte por separado y luego reduce: $\frac{5^3}{5^7}=\frac{125}{78125}=\frac{1}{625}$

Observa que en los ejemplos (a) y (b) es más práctico aplicar la regla del cociente primero, antes que ponerse a ejecutar todas las operaciones por separado. La aplicación de las reglas de los exponentes sirven para simplificar la expresión *antes de* calcular todos los números , puesto que nos encontramos con números más pequeños , más fáciles de trabajar.

c) Utiliza la regla de la potencia de cocientes primero y luego evalúa el resultado: $\left(\frac{3^4}{5^2}\right)^2=\frac{3^8}{5^4}=\frac{6561}{625}$

O realiza las operaciones dentro de los paréntesis primero y luego aplica el exponente: $\left(\frac{3^4}{5^2}\right)^2=\left(\frac{81}{25}\right)^2=\frac{6561}{625}$

Ejemplo B

Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{x^{12}}{x^5}$

b) $\left(\frac{x^4}{x}\right)^5$

Solución

a) Utilizamos la regla del cociente: $\frac{x^{12}}{x^5}=x^{12-5}=x^7$

b) Utilizamos la regla de la potencia de cocientes y la regla del cociente:
$\left(\frac{x^4}{x}\right)^5 = \frac{x^{20}}{x^5} = x^{15}$

O utilizamos la regla del cociente entre los paréntesis primero, luego aplicamos la regla de la potencia: $\left(\frac{x^4}{x}\right)^5 = (x^3)^5 = x^{15}$

Ejemplo C

Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{6x^2y^3}{2xy^2}$

b) $\left(\frac{2a^3b^3}{8a^7b}\right)^2$

Solución

Cuando tenemos una mezcla de números y variables, se aplicarán las normas de cada número o cada variable por separado.

a) Agrupamos los términos semejantes: $\frac{6x^2y^3}{2xy^2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y^3}{y^2}$

A continuación, reducimos el número y aplicamos la regla del cociente de cada fracción para llegar $3xy$.

b) O podemos aplicar la regla del cociente entre los paréntesis primero:
$\left(\frac{2a^3b^3}{8a^7b}\right)^2 = \left(\frac{b^2}{4a^4}\right)^2$

A continuación, aplicamos la regla de la potencia de cocientes: $\left(\frac{b^2}{4a^4}\right)^2 = \frac{b^4}{16a^8}$

Palabras claves

- **Propiedad de Potenciación de cocientes:** Para todos los números reales x,

$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

- **Potencia de un cociente:**

$$\left(\frac{x^n}{y^m}\right)^p = \frac{x^{n\cdot p}}{y^{m\cdot p}}$$

Ejercicios resueltos

Simplifica las siguientes expresiones.

a) $(x^2)^2 \cdot \frac{x^6}{x^4}$

b) $\left(\frac{16a^2}{4b^5}\right)^3 \cdot \frac{b^2}{a^{16}}$

Solución

En los problemas donde tenemos que aplicar varias reglas juntos, debemos mantener el orden de las operaciones en la mente.

a) Se aplica la regla de la potencia primero:

$$(x^2)^2 \cdot \frac{x^6}{x^4} = x^4 \cdot \frac{x^6}{x^4}$$

A continuación, se aplica la regla del cociente para simplificar la fracción:

$$x^4 \cdot \frac{x^6}{x^4} = x^4 \cdot x^2$$

Y finalmente simplificar la regla del producto:

$$x^4 \cdot x^2 = x^6$$

b) $\left(\frac{16a^2}{4b^5}\right)^3 \cdot \frac{b^2}{a^{16}}$

Simplificamos dentro de los paréntesis, reduciendo los números:

$$\left(\frac{4a^2}{b^5}\right)^3 \cdot \frac{b^2}{a^{16}}$$

A continuación, se aplica la regla de la potencia de la primera fracción:

$$\left(\frac{4a^2}{b^5}\right)^3 \cdot \frac{b^2}{a^{16}} = \frac{64a^6}{b^{15}} \cdot \frac{b^2}{a^{16}}$$

Agrupamos los términos semejantes:

$$\frac{64a^6}{b^{15}} \cdot \frac{b^2}{a^{16}} = 64 \cdot \frac{a^6}{a^{16}} \cdot \frac{b^2}{b^{15}}$$

Y aplicamos la regla del cociente para cada fracción:

$$64 \cdot \frac{a^6}{a^{16}} \cdot \frac{b^2}{b^{15}} = \frac{64}{a^{10}b^{13}}$$

Ejercicios resueltos

Evalúa las siguientes expresiones.

1. $\left(\frac{3}{8}\right)^2$
2. $\left(\frac{2^2}{3^3}\right)^3$
3. $\left(\frac{2^3 \cdot 4^2}{2^4}\right)^2$

Simplifica las siguientes expresiones.

4. $\left(\frac{a^3b^4}{a^2b}\right)^3$
5. $\left(\frac{18a^4}{15a^{10}}\right)^4$
6. $\left(\frac{x^6y^2}{x^4y^4}\right)^3$
7. $\left(\frac{6a^2}{4b^4}\right)^2 \cdot \frac{5b}{3a}$
8. $\frac{(2a^2bc^2)(6abc^3)}{4ab^2c}$
9. $\frac{(2a^2bc^2)(6abc^3)}{4ab^2c}$ para $a = 2, b = 1,$ y $c = 3$
10. $\left(\frac{3x^2y}{2z}\right)^3 \cdot \frac{z^2}{x}$ para $x = 1, y = 2,$ y $z = -1$
11. $\frac{2x^3}{xy^2} \cdot \left(\frac{x}{2y}\right)^2$ para $x = 2, y = -3$
12. $\frac{2x^3}{xy^2} \cdot \left(\frac{x}{2y}\right)^2$ para $x = 0, y = 6$
13. Si $a = 2$ y $b = 3$, simplificar $\frac{(a^2b)(bc)^3}{a^3c^2}$ tanto como sea posible.