

## AREA DE POLÍGONOS

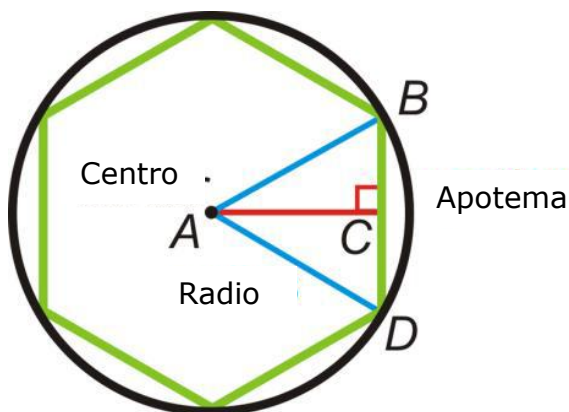
Supón que quieres dibujar un balón de futbol que está formado por muchos pentágonos regulares, después de revisar estos conceptos será más fácil.



Un polígono regular es un polígono con lados y ángulos congruentes. Recordemos que el perímetro de un cuadrado es 4 veces la longitud de un lado ya que cada lado es congruente. Podemos extender este concepto a cualquier polígono regular.

**Perímetro de un polígono regular:** Si la longitud de un lado es  $s$  y hay  $n$  cantidad de lados en un polígono regular entonces el perímetro es  $P=s.n$ .

Para encontrar el área de un polígono regular es necesario definir una nueva terminología. En primer lugar todos los polígonos regulares pueden estar inscritos dentro de un círculo. Así polígonos regulares tienen un **centro** y **radio** que son el centro y el radio del círculo circunscrito. También como un círculo un polígono regular tendrá un ángulo central formado. Sin embargo en un polígono regular el ángulo central es el ángulo formado por dos radios dibujado a los vértices consecutivos del polígono. Puedes observar en la imagen de abajo en el ángulo central  $\angle BAD$ . También observa que  $\triangle BAD$  es un triángulo isósceles. Cada polígono regular de  $n$  lados está formado por  $n$  triángulos isósceles. La altura de estos triángulos isósceles se llama la **apotema**



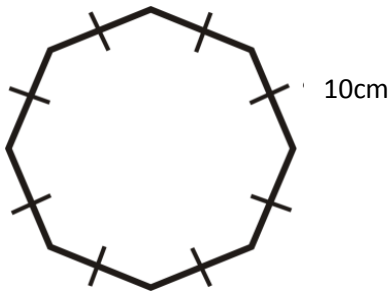
El área de cada triángulo  $\triangle = \frac{b.h}{2} = \frac{s.a}{2}$ . Donde  $s$  es la longitud de un lado y  $a$  es la apotema. Si hay  $n$  partes en el polígono regular entonces está constituido por  $n$  triángulos congruentes.

**Área de un polígono regular:** Si hay  $n$  partes con una longitud  $s$  de un polígono regular y  $a$  es la apotema entonces  $A = \frac{s \cdot a \cdot n}{2}$  o  $A = \frac{a \cdot P}{2}$  donde  $P$  es el perímetro.

### Ejemplo A

¿Cuál es el perímetro de un octágono regular cuyos lados miden 10cm?

Si cada lado es de 10cm y hay 8 lados eso significa que el perímetro es de  $8 (10\text{cm}) = 80\text{cm}$ .



**Respuesta:  $P=80\text{cm}$**

### Ejemplo B

El perímetro de un heptágono regular es 35 cm. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

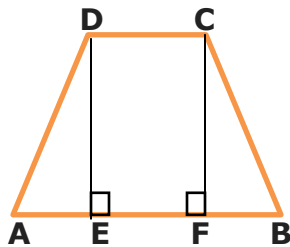
Si  $P=n \cdot s$ , entonces  $35\text{cm} = 7s$ . Por lo tanto,  $s=5\text{cm}$ .

**Respuesta:  $s=5\text{cm}$**

### Trapezio

Considera el trapezio ABCD, como se ve en la figura el trapezio ha sido dividido en dos triángulos y un rectángulo.

Para calcular el área del trapezio debes sumar las áreas de las tres regiones, es decir:



$$A = A_{AED} + A_{BFC} + A_{CDEF}$$

$$A_{AED} = \frac{AE \cdot ED}{2}$$

$$A_{BFC} = \frac{BF \cdot FC}{2}$$

$$A_{CDEF} = EF \cdot DE$$

Si llamas  $h$  a la longitud del segmento  $\overline{DE} = \overline{CF}$ , al segmento  $\overline{DC} = b$  o base menor y al segmento  $\overline{AB} = B$  o base mayor

Tienes  $A = \frac{AE \cdot h}{2} + \frac{BF \cdot h}{2} + (EF \cdot h)$  luego  $AB = AE + EF + BF$   $A = \frac{h}{2} (AE + BF) + EF \cdot h$

Si  $\overline{DC} = \overline{EF} = b$  y  $AE + FB = B - b$  entonces  $A = \frac{h}{2} (B - b) + b \cdot h = \frac{h}{2} B - \frac{h}{2} b + b \cdot h = \frac{h}{2} B + \frac{h}{2} b =$

$$A = \frac{h}{2} (B + b)$$

### Ejemplo C

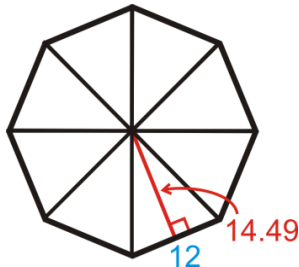
Calcula el área de un trapezio cuya base mayor mide 5cm y su base menor mide 3cm. Su altura es de 20cm.

$$A = \frac{h}{2} (B + b) = \frac{20}{2} (5\text{cm} + 3\text{cm}) = \frac{20 \cdot 8}{2} = \frac{160}{2} = 80\text{cm}^2$$

**Respuesta:  $A = 80\text{cm}^2$**

### EJERCICIOS RESUELTOS

1. Encuentra el área del octágono regular en el ejemplo C

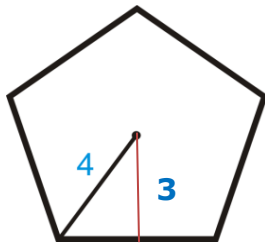


El octágono se puede dividir en 8 triángulos congruentes. Por lo tanto si encontramos el área de un triángulo y multiplicamos por 8 tendremos el área de todo el octágono

$$A = 8 \left( \frac{12 \times 14.49}{2} \right) = 695.52 \text{ unid}^2$$

**Respuesta:  $A = 695.52 \text{ unid}^2$**

2. Encuentra el área del polígono regular de radio 4 y apotema 3.



Usando el teorema de Pitágoras

$$b^2 = 4^2 - 3^2 =$$

$$b = \sqrt{7} \text{ luego } s = 2\sqrt{7}$$

$$A = \left( \frac{s \cdot a \cdot n}{2} \right) = \frac{2\sqrt{7} \cdot 3 \cdot 5}{2} = 15\sqrt{7} \text{ unid}^2$$

**Respuesta:  $A = 15\sqrt{7} \text{ unid}^2$**

3. El área de un hexágono regular es  $54\sqrt{3}$  y el perímetro es 36. Encontrar la longitud de los lados y la apotema

$$A = 54\sqrt{3} \quad \text{Si } P = n \cdot s = 6 \cdot s \text{ entonces}$$

$$P = 36 \quad 36 = 6 \cdot s \text{ y } s = 6$$

$$A = \frac{6 \cdot a \cdot 6}{2} = 18 \cdot a$$

$$54\sqrt{3} = 18 \cdot a$$

$$\frac{54\sqrt{3}}{18} = a \quad a = 3\sqrt{3}$$

**Respuesta:  $s = 6 \text{ unid}$ ,  $a = 3\sqrt{3}$**

4. El área de un trapecio es  $120 \text{ m}^2$ , la altura  $8 \text{ m}$ , y la base menor mide  $10 \text{ m}$ . ¿Cuánto mide la otra base?

$$120 = \frac{(B+10)}{2} \cdot 8 \quad 120 = (B+10) \cdot 4$$

$$\frac{120}{4} = B+10 \quad 30 = B+10 \quad B = 20$$

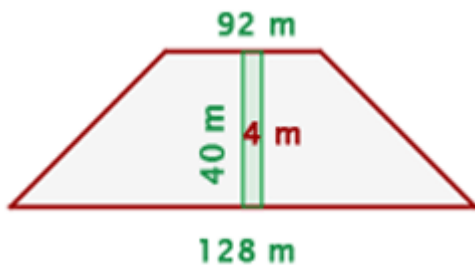
**Respuesta: B=20unidad**

5. Una zona boscosa tiene forma de trapecio, cuyas bases miden  $128 \text{ m}$  y  $92 \text{ m}$ . La anchura de la zona mide  $40 \text{ m}$ . Se construye un paseo de  $4 \text{ m}$  de ancho perpendicular a las dos bases. Calcula el área de la zona arbolada que queda

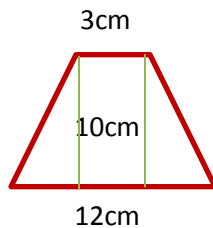
$$A_z = A_{\text{trapecio}} - A_{\text{camino}}$$

$$A = \frac{(128+92)}{2} \cdot 40 - 40 \cdot 4 = 4240 \text{ m}^2$$

**Respuesta: A=4240m<sup>2</sup>**



6. Hallar el perímetro y el área de la figura:



$$A = \frac{(15+3)}{2} \cdot 10 = \frac{(180)}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

Para el perímetro si restamos los  $3 \text{ cm}$  de la base menor trazando el rectángulo en la base mayor, da  $9 \text{ cm}$  que dividido en dos nos da la base del triángulo rectángulo igual a  $4,5 \text{ cm}$ , usando Pitágoras

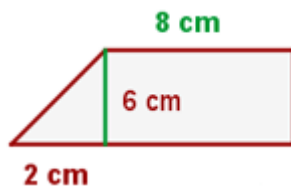
$$l^2 = (4,5)^2 + (10)^2 = 20,25 + 100 = 120,25$$

$$l = \sqrt{120,25} \approx 10,96 \text{ cm}$$

$$P = 3 + 12 + 2 \times 10,96 \approx 36,93 \text{ cm}$$

**Respuesta: A=60cm<sup>2</sup> ,P=36,93cm**

7. Hallar el perímetro y el área del trapecio rectángulo:



$$l^2 = 6^2 + 2^2$$

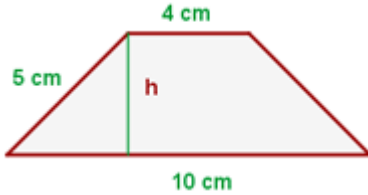
$$l = \sqrt{40} = 6,32 \text{ cm}$$

$$P = 8 + 6 + 10 + 6,32 = 30,32 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(10+8) \cdot 6}{2} = 54 \text{ cm}^2$$

**Respuesta: A=54cm<sup>2</sup>**

8. Hallar el perímetro y el área del trapecio isósceles:



$$5^2 = h^2 + 3^2$$

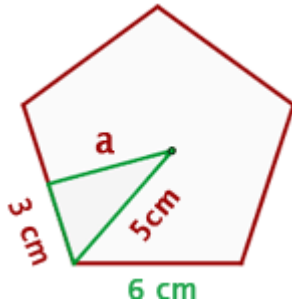
$$h = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$P = 2 \cdot 5 + 4 + 10 = 24 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(10+4) \cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$

**Respuesta: A=28cm<sup>2</sup>**

9. Hallar el perímetro y el área del pentágono regular :



$$5^2 = a^2 + 3^2$$

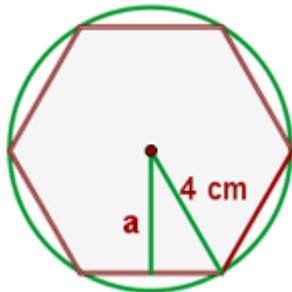
$$a = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$P = 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$$

$$A = \frac{30 \cdot 4}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

**Respuesta: A=60cm<sup>2</sup>**

10. Hallar el área de un hexágono inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.



$$A = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3.46}{2} = 41.52 \text{ cm}^2$$

**Respuesta: A=41,52cm<sup>2</sup>**

## Glosario

**Perímetro.** Es la distancia alrededor de una figura. El perímetro de cualquier figura debe tener una unidad de medida. Si no hay unidades específicas (pies, pulgadas, centímetros, etc.), escriba "unidades".

**Área.** Es la cantidad de espacio dentro de una figura. El área se mide en unidades cuadradas.

El **centro** y el **radio** de un polígono regular son el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.

Una **apotema** es un segmento de recta trazada desde el centro de un polígono regular con el punto medio de uno de sus lados.

## Otras Referencias

<http://es.scribd.com/doc/56401295/Ejercicios-de-Areas-de-poligonos#scribd>

<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomaticas/1quincena9/1quincena9.pdf>

