ÁNGULOS

Imagina que quieres calcular la dirección que debes darle a una pelota de golf para meterla en el hoyo, o la pendiente adecuada para la instalación de una canal de recolección de agua de lluvia, o simplemente quieres construir una rampa para correr unos carritos de juguete. Debes conocer las características y formas de medir y calcular ángulos.

Ángulos y pares de ángulos

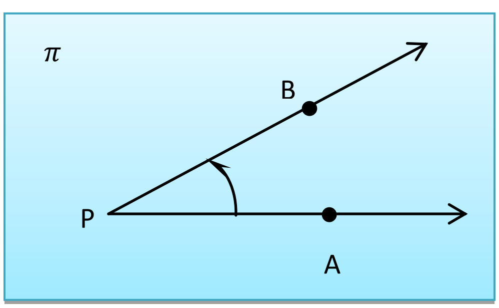
Objetivos de aprendizaje

- Entender e identificar ángulos complementarios.
- Entender e identificar ángulos suplementarios.
- Entender y utilizar el postulado de ángulos adyacentes.
- Entender e identificar ángulos opuestos por el vértice.

En esta lección aprenderás sobre pares de ángulos especiales y probarás uno de los teoremas más útiles en geometría, el teorema de ángulos opuestos por el vértice.

Angulo.

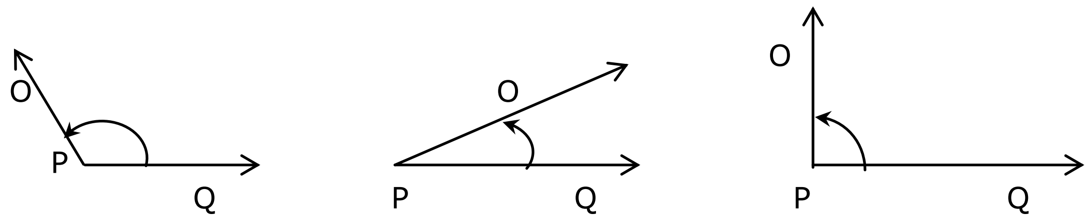
Considera en un plano π dos semirrectas $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ de origen común P. Un **ángulo** es el giro que hace coincidir la semirrecta $\overrightarrow{PA}$ con la semirrecta $\overrightarrow{PB}$ manteniendo fijo el punto P. En este caso la semirrecta $\overrightarrow{PA}$ se ha girado en el sentido contrario de las agujas del reloj (sentido anti horario), el cual se considera como positivo, haciéndola coincidir con la semirrecta $\overrightarrow{PB}$.



Se representan como <**PAB** o con letras griegas (α ,β ,δ, θ)

Medida de ángulos

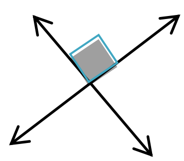
Medir un ángulo es determinar la amplitud del giro. Para esto se utiliza un instrumento llamado transportador. Se denota m ($< OPQ$) y se lee la medida del ángulo OPQ.



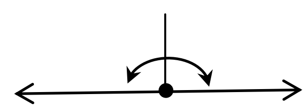
Tres ángulos con diferentes amplitudes de giro.

Ángulos especiales

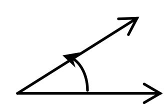
Un ángulo cuya medida es igual a 90° se denomina **ángulo recto.**
Dos rectas que se intersectan formando un ángulo recto son **rectas perpendiculares** entre si y se representan con un cuadrado pequeño en el punto de intersección de las rectas.



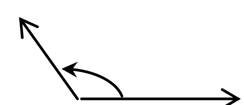
Un ángulo cuya medida es igual a 180° se denomina **ángulo llano.**



Un ángulo menor que 90° y mayor que 0° se denomina **ángulo agudo.**

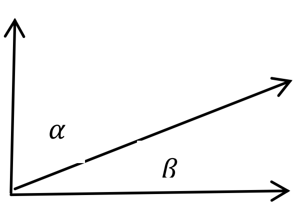


Un ángulo mayor que 90° y menor que 180° se denomina **ángulo obtuso.**



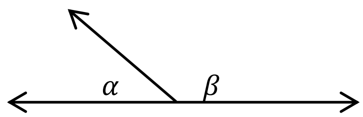
Ángulos complementarios

Un par de ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90°.
Los ángulos complementarios no tienen que ser congruentes entre sí. Lejos de eso, la única cualidad que los define es que la suma de sus medidas es igual a la medida del ángulo recto: 90°. Si los rayos externos de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto, entonces los ángulos son complementarios.



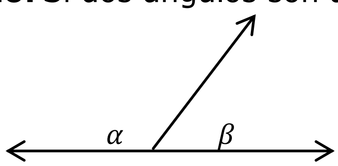
Ángulos suplementarios

Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es igual a 180°.



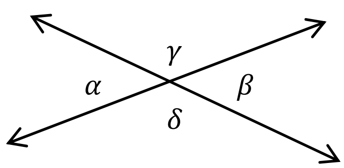
Ángulos Adyacentes

Dos ángulos son **adyacentes** cuando siendo consecutivos sus lados no comunes forman un ángulo llano.
Postulado: Si dos ángulos son adyacentes, entonces son suplementarios.



Ángulos opuestos por el vértice

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** si tienen el mismo vértice y los lados son semirrectas opuestas. β es opuesto a α y γ es opuesto a δ

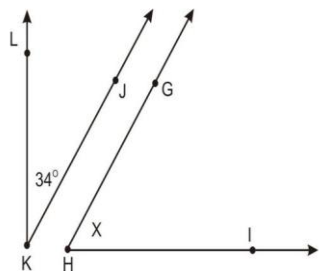


Ángulos consecutivos

Dos ángulos son **consecutivos** cuando tienen el vértice y un lado común y no se superponen.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Los ángulos de abajo son complementarios si m $(<GHI)$ = X, determina el valor de X.

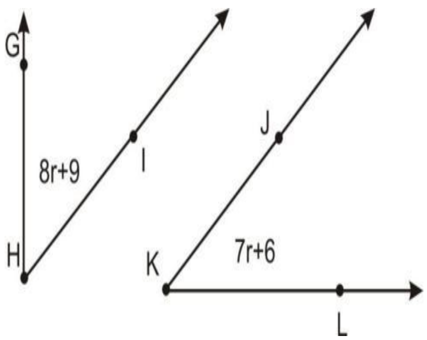


Como sabes la suma de los dos ángulos debe ser 90°, se plantea la ecuación:

$$34 + X = 90$$
$$X = 90 - 34$$
$$X = 56$$

Respuesta: X= 56°

2. Los ángulos a continuación son complementarios. ¿Cuánto mide cada uno?



Este problema es un poco más complicado que el primero. De todas formas, los conceptos siguen siendo los mismos. Si tú sumas ambos ángulos, su resultado será. De esta manera, puedes plantear una ecuación algebraica con los valores presentados.

$$(7r + 6) + (8r + 9) = 90$$
$$7r + 8r + 6 + 9 = 90$$
$$15r = 90 - 15$$
$$15r = 75$$
$$r = \frac{75}{15}$$

r= 5

El valor de r= 5 se sustituye en las expresiones

(7r + 6)= (7.5+6)=41

(8r + 9)= (8.5+9)=49

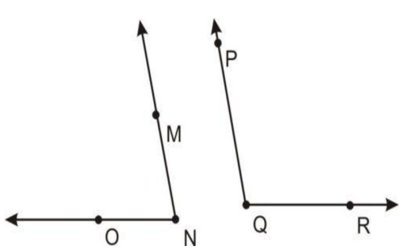
Luego la m$(<JKL)$ =41° y la m$(<GHI)$=49°

La suma de los dos ángulos debe ser igual a 90° porque son complementarios

41+49=90°

Respuesta: 41° y 49°

3. Los ángulos $(<MNO)$ y $(<PQR)$ son suplementarios, si m $(<MNO)$=78° ¿cuánto vale m $(<PQR)$?



Este procedimiento es muy directo. Ya que sabes que la suma de los dos ángulos debe dar 180°, ya puedes plantear una ecuación. Usa una variable para representar el ángulo desconocido y luego despéjala. En este caso, sustituyamos Y por m $(<PQR)$.

$$Y + 78 = 180$$
$$Y = 180 - 78$$
$$Y = 102$$

Luego m $(<PQR)$= 102°

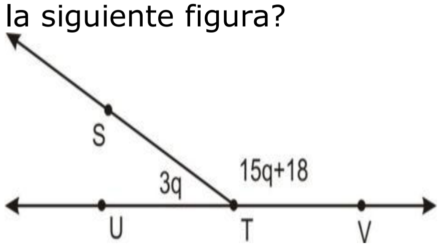
Respuesta: 102°

4. ¿Cuánto miden dos ángulos congruentes que sean también suplementarios?

No tenemos un diagrama que nos ayude a visualizar este escenario, así que tendrás que imaginar los ángulos (o aún mejor, ¡trata de dibujar por ti mismo traduciendo estas palabras en una imagen!). Dos ángulos suplementarios deben sumar 180°. Los ángulos congruentes deben medir lo mismo. Ahora, lo que tú tienes que hacer es encontrar dos ángulos congruentes que sean suplementarios. Puedes dividir 180 entre dos para encontrar el valor de cada ángulo.
180÷2=90

Respuesta:
Cada ángulo congruente y suplementario medirá 90°. En otras palabras, serán ángulos rectos.

5. ¿Determina cuánto mide cada ángulo en la siguiente figura?



Si sumas ambos ángulos, el resultado será 180°. Entonces, puedes plantear una ecuación algebraica con los valores presentados.
$3q + (15q + 18) = 180$

La mejor manera de resolver este problema es despejar q de la ecuación de arriba. Luego, debes sustituir el valor de q de nuevo en las expresiones originales para encontrar el valor de cada ángulo.

$$3q + 15q = 180 - 18$$
$$18q = 162$$
$$q = \frac{162}{18}$$
q=9

Sustituyendo el valor q=9 en

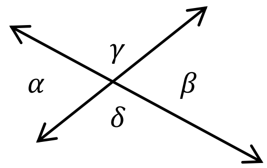
3q=3(9)
3q=27

(15q+18)=15.9+18
=135+18
=153

Respuesta: Los dos ángulos miden 27° y 153° respectivamente, son adyacentes y suplementarios, se verifica sumándolos

27+153=180°

6. Se tiene la figura donde la m(γ)=100°, se pide la medida de los otros ángulos.



Se tiene que m(γ)=100°, usando esta información y sabiendo que:

γ y β son ángulos suplementarios igual que α y δ por tanto su suma es igual a 180° luego

$\gamma+\beta$=180
$100+\beta$=180
β=180-100
β=80

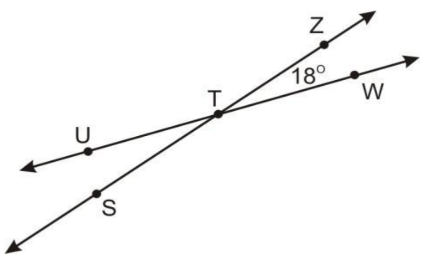
δ y γ son ángulos opuestos por el vértice (congruentes) por tanto
$\delta = \gamma$ =100

$\alpha+\delta$=180
α +100=180
α=180-100
α=80

α y β =80(congruentes) opuestos por el vértice.

Respuesta: m(α)=80°, m(β)=80°, m(δ)=100°

7. ¿Cuál es la m ($< STU$) en la figura?

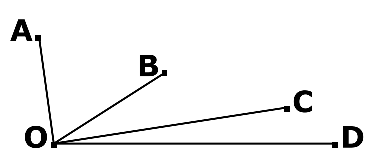


El ángulo $< STU$ es congruente con el ángulo correspondiente a 18°, por ser ángulos opuestos por el vértice por tanto

Respuesta: m ($< STU$)=18°

8. Se tienen los ángulos consecutivos ∠AOB, ∠BOC y ∠COD, siendo: m (∠AOC) = 47◦, m (∠BOD) = 51◦, y m (∠AOD) = 80◦. Hallar m (∠BOC).

Grafica los ángulos



Primero calculamos la medida de ∠COD. ∠COD = ∠AOD − ∠AOC = 80◦ − 47◦ = 33◦. Entonces
∠BOC = ∠BOD − ∠COD = 51◦ − 33◦ = 18◦.

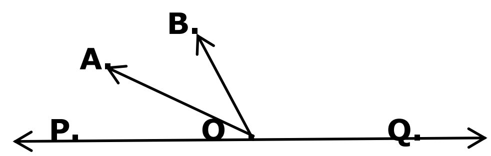
Respuesta: 18°

9. Hallar la medida de un ángulo, sabiendo que su complemento y suplemento suman 208°

Sea x la medida del ángulo pedido. Entonces, según el enunciado
$(90^\circ - x) + (180^\circ - x) = 208^\circ$.
Entonces
$270^\circ - 2x = 208^\circ$) de donde
$2x = 62^\circ$ y de allí
$x = 31^\circ$

Respuesta: X=31°

10. Dada la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y un punto O sobre ella, a un mismo lado se trazan las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, tal que $\overrightarrow{OA}$ sea interior al $\angle POB$ y m $(\angle AOP) = 54^\circ$. Hallar la medida de $\angle AOB$ si $\angle QOB$ es el suplemento del triple de $\angle BOA$.



Según el enunciado:

$\angle POA + \angle AOB + \angle BOQ = 180^\circ$
Entonces
$54^\circ + x + (180^\circ - 3x) = 180^\circ$
de donde se obtiene que $x = 27^\circ$

Respuesta: X= 27°

Profesor Danesa Padilla Versión 2015-05-13

Glosario

Angulo Es la medida del arco entre dos semirrectas al girar una con respecto a la otra desde un punto fijo.

Cuando miden menos de 90° son **ángulos agudos.**

Cuando miden 90° son **ángulos rectos**.

Cuando miden más de 90° y menos de 180° son **ángulos obtusos.**

Cuando miden 180° son **ángulos llanos**.

Según su posición dos ángulos que tienen un lado común y los otros lados están en la misma recta son **ángulos adyacentes.**

Cuando dos ángulos suman 90° son **complementarios.**

Cuando suman 180° son **suplementarios.**

Cuando los lados de uno son las prolongaciones del otro son **opuestos por el vértice.**

Cuando tienen el vértice y un lado común y no se superponen son **consecutivos**

Otras Referencias

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/angulos_ejercicios.html

http://www.mateslibres.com/geometria/geometria_identificar_angulos_todos_001.html