

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Un modelo a escala de un auto de carreras está en proporción $1:x$ a un auto de carreras real. La longitud del modelo es $2x - 21$ unidades y la longitud del automóvil de carrera real es de x^2 unidades. ¿Cuál es el valor de x ?



Algo fundamental en el mundo algebraico son las **fracciones algebraicas**. Una fracción algebraica es como cualquier fracción, sólo que involucra polinomios o en el numerador o en el denominador. Las fracciones algebraicas tienen diversas propiedades, hoy veras una de ellas. Cuando este tipo de fracciones se presentan en forma de ecuación, se les conoce como **ecuación racional**, y puedes resolverla a través de una propiedad que veras a continuación.

Una **ecuación racional** es una ecuación donde hay expresiones racionales en ambos lados del signo igual. Una manera de resolver ecuaciones racionales es utilizar la propiedad de la **multiplicación en cruz**. He aquí un ejemplo de una proporción que puedes resolver mediante la multiplicación en cruz.

$$\frac{12}{x} = \frac{30}{75}$$

$$30 \cdot x = 12 \cdot 75$$

$$30x = 900$$

$$x = 30$$

Empieza a resolver otras ecuaciones racionales.

Ejemplo A

Resuelve $\frac{x}{2x-3} = \frac{3x}{x+11}$.

Respuesta: Usa la multiplicación en cruz primero. Luego, utiliza lo que ya conoces para resolver ecuaciones polinómicas igualadas a cero.

$$\frac{x}{2x-3} = \frac{3x}{x+11}$$

$$3x(2x-3) = x(x+11)$$

$$6x^2 - 9x = x^2 + 11x$$

$$5x^2 - 20x = 0$$

$$5x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \text{ ó } 4$$

Comprueba tus respuestas. No te asustes si ves soluciones extrañas para las ecuaciones racionales, es totalmente normal.

$$\frac{0}{2 \cdot 0 - 3} = \frac{3 \cdot 0}{0 + 11}$$

$$\frac{0}{-3} = \frac{0}{11}$$

$$0 = 0$$

$$\frac{4}{2 \cdot 4 - 3} = \frac{3 \cdot 4}{4 + 11}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

Ejemplo B

Resuelve $\frac{x+1}{4} = \frac{3}{x-3}$.

Respuesta: Multiplica en cruz y resuelve.

$$\frac{x+1}{4} = \frac{3}{x-3}$$

$$12 = x^2 - 2x - 3$$

$$0 = x^2 - 2x - 15$$

$$0 = (x-5)(x+3)$$

$$x = 5 \text{ ó } -3$$

Comprueba tus respuestas.

$$\frac{5+1}{4} = \frac{3}{5-3} \rightarrow \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ y } \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{-3-3} \rightarrow \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo C

Resuelve $\frac{x^2}{2x-5} = \frac{x+8}{2}$.

Respuesta: Multiplica en cruz y resuelve.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2x-5} &= \frac{x+8}{2} \\ 2x^2 + 11x - 40 &= 2x^2 \\ 11x - 40 &= 0 \\ 11x &= 40 \\ x &= \frac{40}{11}\end{aligned}$$

Comprueba la respuesta: $\frac{\left(\frac{40}{11}\right)^2}{\frac{80}{11}-5} = \frac{\frac{40}{11}+8}{2} \rightarrow \frac{1600}{121} \div \frac{25}{11} = \frac{128}{11} \div 2 \rightarrow \frac{64}{11} = \frac{128}{22}$

¿Y si tuvieras dos fracciones algebraicas como $\frac{x}{x+5}$ y $\frac{3}{x-4}$ con diferentes denominadores? ¿Cómo harías para sumarlas o restarlas? Después de terminar esta lección, serás capaz de sumar o restar fracciones algebraicas con igual o distinto denominador.

Como las fracciones numéricas, las fracciones algebraicas también representan una parte de un todo. Recuerda que antes de sumar o restar fracciones debes asegurarte que tienen el mismo denominador. Una vez que ambas fracciones tienen el mismo denominador, puedes realizar una suma o resta cualquiera de los numeradores.

Sumar y restar fracciones algebraicas con mismo denominador

Las fracciones con denominadores comunes se combinan de la siguiente manera:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{and} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Ejemplo D

Realiza las siguientes operaciones y simplifica.

$$a) \frac{8}{7} - \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$$

$$b) \frac{4x^2-3}{x+5} + \frac{2x^2-1}{x+5}$$

$$c) \frac{x^2-2x+1}{2x+3} - \frac{3x^2-3x+5}{2x+3}$$

Respuesta: a) Ya que los denominadores son iguales, suma los numeradores:

$$\frac{8}{7} - \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8-2+4}{7} = \frac{10}{7}$$

Ya que los denominadores son iguales, une los numeradores $\frac{4x^2-3+2x^2-1}{x+5}$

Luego simplifica uniendo términos semejantes: $\frac{6x^2-4}{x+5}$

b)

c) Ya que los denominadores son iguales para este caso también, une los numeradores.

$$\frac{x^2 - 2x + 1 - (3x^2 - 3x + 5)}{2x + 3} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x - 5}{2x + 3} = \frac{-2x^2 + x - 4}{2x + 3}$$

Encontrar el mínimo común múltiplo de dos polinomios

Para sumar y restar fracciones con diferentes denominadores, primero debes conseguir un denominador común entre ellas. En general, debes encontrar el **mínimo común múltiplo**. Recuerda que el mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor número que es múltiplo de todos ellos.

El procedimiento para encontrar el mínimo común múltiplo para fracciones algebraicas es muy similar. Factorizas los polinomios de los denominadores y formas el mcm a través de una multiplicación sencilla y en caso de repetirse un factor, tomas la potencia más alta.

Observa algunos ejemplos.

Ejemplo E

Encuentra el mcm de $48x^2y$ y $60xy^3z$.

Respuesta: Primero reescribe los enteros como factores primos.

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Las dos expresiones pueden escribirse como:

$$48x^2y = 2^4 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y$$

$$60xy^3z = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z$$

Para encontrar el mcm, toma la mayor potencia de cada factor que aparece en cada uno de los términos.

$$\text{mcm} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z = 240x^2y^3z$$

Ejemplo F

Encuentra el mcm de $2x^2 + 8x + 8$ y $x^3 - 4x^2 - 12x$.

Respuesta: Factoriza los polinomios por completo:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 8x + 8 &= 2(x^2 + 4x + 4) \\ &= 2(x + 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 12x &= x(x^2 - 4x - 12) \\ &= x(x + 2)(x - 6) \end{aligned}$$

Si tomas los factores con mayor potencia de ambas expresiones queda:

$$\text{mcm} = 2x(x + 2)^2(x - 6)$$

Es costumbre dejar el mcm en forma factorizada, ya que así se pueden encontrar factores que se cancelan y soluciones que se excluyen de la función.

Sumar y restar fracciones algebraicas con distinto denominador

Ahora estás listo para sumar y restar fracciones algebraicas con distinto denominador. Utiliza el siguiente procedimiento.

1. Encuentra el **mínimo común múltiplo** (mcm) de los denominadores.
2. Expresa cada fracción como una fracción equivalente con el nuevo denominador común.
3. Suma o resta las fracciones.

Ejemplo G

Realiza la siguiente operación y simplifica: $\frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-5}$

Respuesta: Los denominadores no se puede factorizar más, por lo que el mcm es simplemente el producto de los denominadores: $(x+2)(2x-5)$. Eso significa que la primera fracción tiene que ser multiplicada por el factor $(2x-5)$ y la segunda fracción tiene que ser multiplicada por el factor $(x+2)$:

$$\frac{2}{x+2} \cdot \frac{(2x-5)}{(2x-5)} - \frac{3}{2x-5} \cdot \frac{(x+2)}{(x+2)}$$

Combina los numeradores y simplifica:

$$\frac{2(2x-5) - 3(x+2)}{(x+2)(2x-5)} = \frac{4x - 10 - 3x - 6}{(x+2)(2x-5)}$$

Combina los términos semejantes:

$$\frac{x - 16}{(x+2)(2x-5)} \quad \text{Respuesta}$$

Ejemplo H

Realiza la siguiente operación y simplifica: $\frac{4x}{x-5} - \frac{3x}{5-x}$.

Respuesta: Ten en cuenta que los denominadores son casi iguales, solo se diferencian por un factor -1.

Extrae el -1 del segundo denominador:

$$\frac{4x}{x-5} - \frac{3x}{-(x-5)}$$

Los dos signos negativos en la segunda fracción se cancelan:

$$\frac{4x}{x-5} + \frac{3x}{(x-5)}$$

Ya que los denominadores son iguales, combinamos los numeradores:

$$\frac{7x}{x-5} \quad \text{Respuesta}$$

Problema dado al principio de la lección

Tienes que establecer una ecuación racional y resolverla para x.

$$\frac{1}{x} = \frac{2x-21}{x^2}$$

Multiplicando en cruz resuelves la ecuación.

$$x^2 = x(2x - 21)$$

$$x^2 = 2x^2 - 21x$$

$$0 = x^2 - 21x$$

$$0 = x(x - 21)$$

$$x = 0, 21$$

Sin embargo, x es una relación, por lo que debe ser mayor que 0. Por lo tanto x es igual a 21 y el modelo a escala está en la relación de uno: veintiuno contra el auto de carreras real

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales

$$\frac{-x}{x-1} = \frac{x-8}{3}$$

$$x^2 - 9x + 8 = -3x$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad (x-4)(x-2) = 0$$

$$x=4 \text{ o } x=2$$

Si verificas

$$x=4 \quad \frac{-4}{4-1} = \frac{4-8}{3} \quad x=2 \quad \frac{-2}{2-1} = \frac{2-8}{3}$$

$$\frac{-4}{3} = \frac{-4}{3} \quad \frac{-2}{1} = \frac{-6}{3}$$

Respuesta: $x=4,2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales

$$\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{2x-1}{2}$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 - 2 \quad 3x = 0 \quad x = 0$$

Verificando $\frac{0-1}{0+2} = \frac{0-1}{2}$

Respuesta: $x=0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales

$$\frac{9-x}{x^2} = \frac{4}{-3x}$$

$$4x^2 = -27x + 3x^2 \quad x^2 + 27x = 0$$

$$x(x+27) = 0 \quad x = 0 \text{ o } x = -27$$

Verificando

$$x = 0 \quad \frac{9-0}{0} = \frac{4}{0} \quad x = -27 \quad \frac{9-27}{(-27)^2} = \frac{4}{-3 \cdot (-27)}$$

Indeterm = Indeterm $\frac{36}{729} = \frac{4}{81} \quad \frac{4}{81} = \frac{4}{81}$

$x = 0$ no es realmente una solución, ya que 0 no está en el dominio de la función como tal. Esto lo entenderás mejor en capítulos posteriores.

Respuesta: $x = -27$

4. Calcula el m.c.m de $x^2 - 25$ y $x^2 + 3x + 2$

Primero factorizas los dos polinomios por completo para verificar si existen factores comunes.

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5) \text{ y}$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

Dado a que los dos polinomios no tienen ningún factor común, significa que el mcm de los dos polinomios es su producto:

Respuesta:

$$(x^2 - 25)(x^2 + 3x + 2) = x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 75x - 50$$

5. Realiza la siguiente operación y simplifica

$$\frac{2x-1}{x^2-9} - \frac{3x+4}{x^2-9}$$

Ambas fracciones tienen el mismo denominador, por lo tanto unimos los numeradores.

$$\frac{2x-1}{x^2-9} - \frac{3x+4}{x^2-9} = \frac{2x-1-(3x+4)}{x^2-9} = \frac{2x-1-3x-4}{x^2-9} = \frac{-x-5}{x^2-9}$$

Respuesta: $\frac{-x-5}{x^2-9}$

6. Realiza la siguiente operación y simplifica

$$\frac{4x-3}{2x+1} + \frac{x+2}{x-9}$$

$$\frac{4x-3}{2x+1} + \frac{x+2}{x-9} = \frac{(4x-3)(x-9) + (2x+1)(x+2)}{(2x+1)(x-9)}$$

$$\frac{4x^2 - 36x - 3x + 27 + 2x^2 + x + 4x + 2}{(2x+1)(x-9)} = \frac{6x^2 - 34x + 29}{(2x+1)(x-9)}$$

Respuesta: $\frac{6x^2-34x+29}{(2x+1)(x-9)}$

7. Realiza la siguiente operación y simplifica

$$\frac{x^2}{x+4} - \frac{3x^2}{4x-1}$$

$$\frac{x^2}{x+4} - \frac{3x^2}{4x-1} = \frac{(4x-1)x^2 - (x+4)3x^2}{(x+4)(4x-1)}$$

$$= \frac{x^2(4x-1-3x-12)}{(x+4)(4x-1)} = \frac{x^2(x-13)}{(x+4)(4x-1)}$$

Respuesta: $\frac{x^2(x-13)}{(x+4)(4x-1)}$

8. Realiza la siguiente operación y simplifica

$$\frac{2x}{13} - \frac{x}{3}$$

$$\frac{2x}{13} - \frac{x}{3} = \frac{(2x)3 - 13x}{39} = \frac{6x - 13x}{39} = \frac{-7x}{39}$$

Respuesta: $\frac{-7x}{39}$

9. Realiza la siguiente operación y simplifica

$$\frac{5}{2x+3} + \frac{3}{2x+3}$$

$$\frac{5}{2x+3} + \frac{3}{2x+3} = \frac{5+3}{2x+3} = \frac{8}{2x+3}$$

Respuesta: $\frac{8}{2x+3}$

10 Realiza la siguiente operación y simplifica

$$\frac{1}{5x-7} + \frac{10}{5x-7} = \frac{1+10}{5x-7} = \frac{11}{5x-7}$$

Respuesta: $\frac{11}{5x-7}$

11 Realiza la siguiente operación y simplifica

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{3x+2x}{3x^2} = \frac{5x}{3x^2} = \frac{5}{3x}$$

Respuesta: $\frac{5}{3x}$

Profesor Danesa Padilla

Versión Fecha 2015-09-16

Glosario

Fracción algebraica. Es una fracción cualquiera que involucra polinomios.

Ecuación racional. Es una ecuación donde hay expresiones racionales en ambos lados del signo igual

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/ab/p/a_15e.html

http://www.vitutor.com/ab/p/a_15.html

