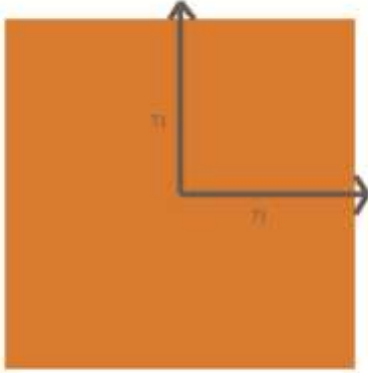


ADICIÓN DE VECTORES Y SUS PROPIEDADES

Tú y un amigo están arrastrando una caja por el suelo. Sin embargo, cada uno de ustedes está jalando en una dirección diferente. Un diagrama de sus esfuerzos se vería así:

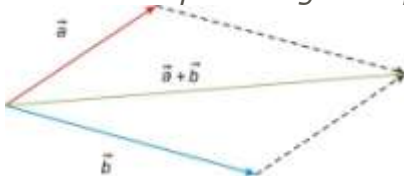


Cada una de estas fuerzas es un vector. ¿Se puede determinar la fuerza neta que ambos están aplicando a la caja? Para determinar la fuerza neta ejercida sobre la caja deberás saber sumar vectores.

Suma Geométrica de dos Vectores.

La suma de dos o más vectores se llama la **resultante** de los vectores. Hay dos métodos que puedes utilizar para encontrar la resultante, el método del paralelogramo y el método del triángulo.

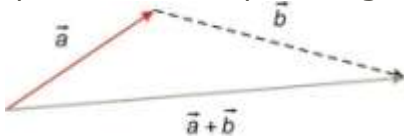
El método del paralelogramo: para utilizar este método, dibuja los vectores de tal manera que sus puntos iniciales se encuentren. Luego, traza las líneas que faltan para formar un paralelogramo. La resultante es la diagonal que va desde el punto inicial hasta el vértice opuesto del paralelogramo. *Es importante tener en cuenta que no puedes utilizar el método del paralelogramo para encontrar la suma en sí, es más un método gráfico.*



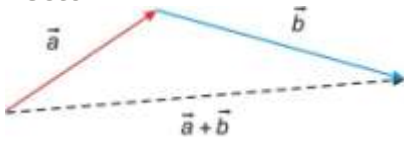
Para encontrar el valor de la suma en sí, debes usar regla y transportador y así encontrar la magnitud y dirección del nuevo vector.

Si te fijas bien, te darás cuenta que el método del paralelogramo es realmente una versión del método del triángulo. Si te fijas en la parte superior de la figura anterior se puede ver

que un lado del paralelogramo es realmente el vector b trasladado.



El método del triángulo: para utilizar este método, traza los vectores uno detrás del otro y coloca el punto inicial del segundo vector como el punto final del primero. Luego, dibuja el vector resultante desde el punto inicial del primer vector hasta el punto final del segundo vector.



Para encontrar el valor de la suma en sí, debes usar regla y transportador y así encontrar la magnitud y dirección del nuevo vector.

El vector resultante puede ser mucho más largo que \vec{a} ó \vec{b} , o puede ser más corto. A continuación se presentan algunos ejemplos del método del triángulo.

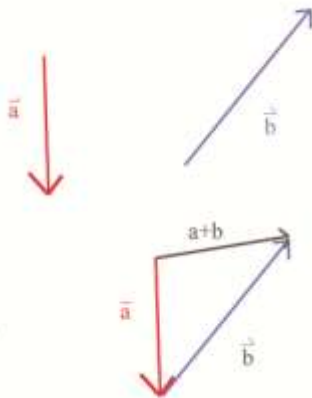
Ejemplo A



Ejemplo B

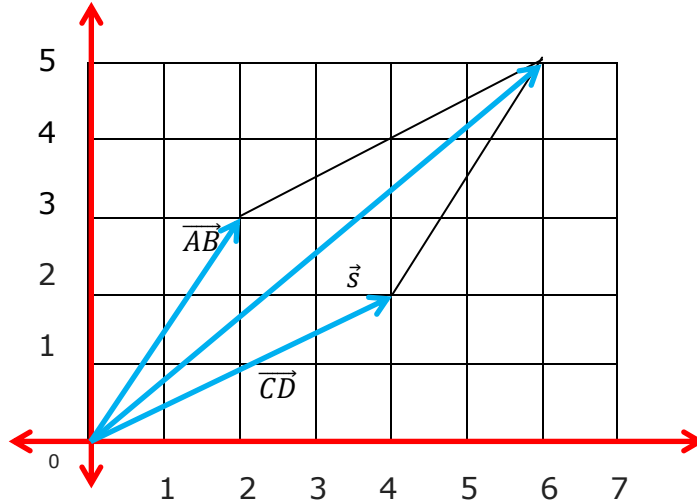


Ejemplo C



Suma analítica de vectores.

Considera dos vectores dados sus componentes $\overrightarrow{AB} = (2,3)$ y $\overrightarrow{CD} = (4,2)$ si aplicas la regla del paralelogramo, encuentras el vector suma $\vec{s} = (6,5)$ como puedes observar en la figura



Analíticamente

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2,3) + (4,2) = (2 + 4, 3 + 2) = (6,5)$$

Observa que las componentes del vector \vec{s} , es igual a la suma de las componentes en x y de y de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} . Es decir

Si $\vec{a} = (x_1, y_1)$ y $\vec{b} = (x_2, y_2)$ el vector suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Ejemplo A

Dados los vectores $\vec{m} = (3, -1)$ y $\vec{n} = (2, -4)$. Determina el vector $\vec{s} = \vec{m} + \vec{n}$

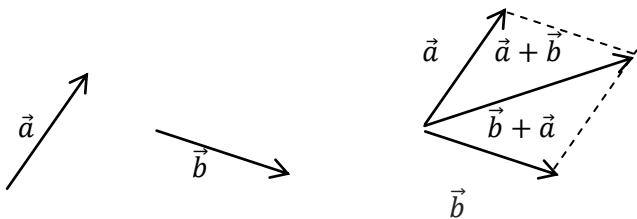
$$\vec{s} = \vec{m} + \vec{n} = (3, -1) + (2, -4) = [3 + 2, (-1) + (-4)] = (5, -5)$$

Respuesta: (5,-5)

Propiedades de la Adición de Vectores

Conmutativa: dado dos vectores \vec{a} y \vec{b} se cumple que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

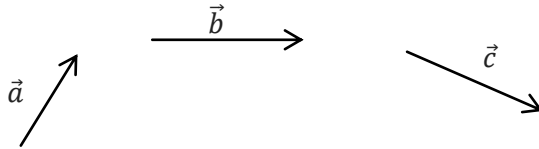
Ejemplo B



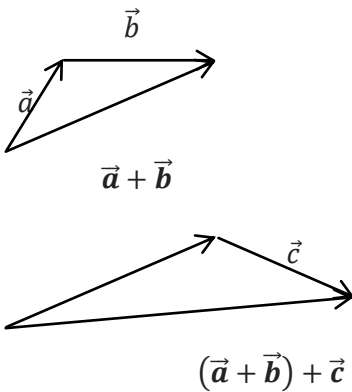
Asociativa: Dados los vectores \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} se cumple que $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Ejemplo C

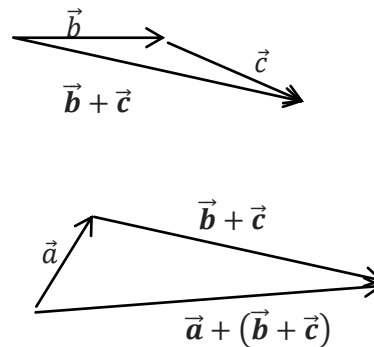
Dados los vectores



Hallemos $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$



Hallemos $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



Elemento Neutro: Al sumar el vector nulo $\vec{0}$ con cualquier vector \vec{a} se obtiene como vector suma el mismo vector \vec{a} .

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

El vector nulo es el elemento neutro de la adición de vectores.

Ejemplo D

Dado el vector $\vec{a}(3,4)$ y $\vec{0}(0,0)$ halla el vector suma de $\vec{a} + \vec{0}$

$$\vec{a} + \vec{0} = (3,4) + (0,0) = (3,4)$$

$$\vec{0} + \vec{a} = (0,0) + (3,4) = (3,4)$$

Elemento Simétrico: en la adición de vectores siempre se cumple que al sumar un vector \vec{a} con su inverso $-\vec{a}$ se obtiene el vector nulo $\vec{0}$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

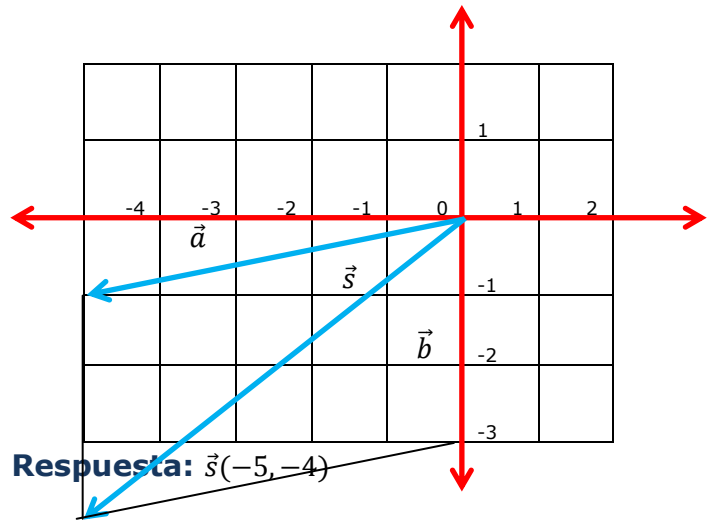
Ejemplo E

Dados los vectores $\vec{a}(-3,4)$ y $-\vec{a}(3,-4)$ halla el vector suma de $\vec{a}+(-\vec{a})$

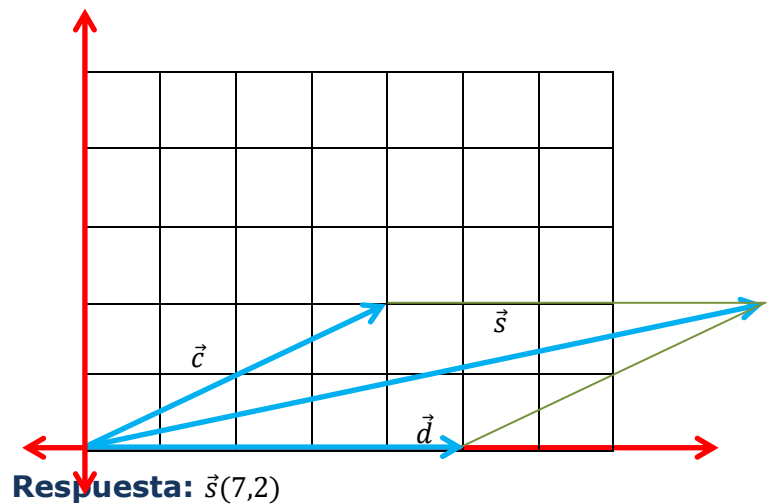
$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-3,4)+(3,-4)=[-3+3,4+(-4)]=(0,0) \text{ vector nulo } \vec{0}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

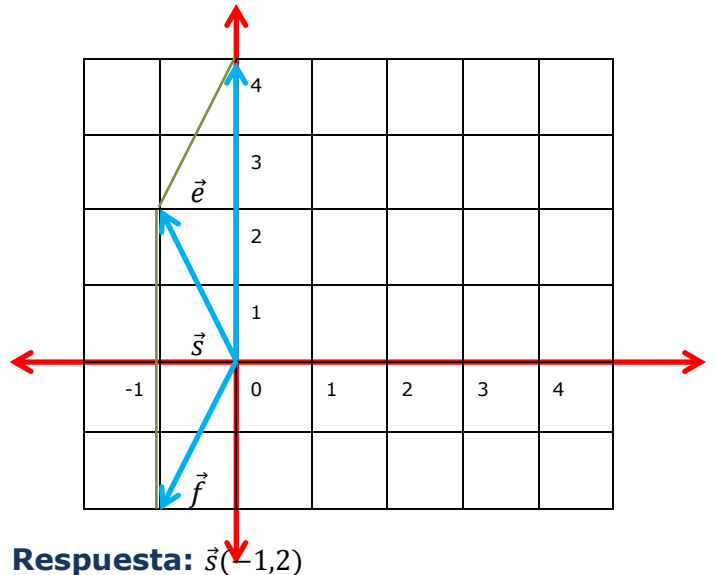
1. Dadas las componentes de los vectores $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$
 determina el vector suma gráficamente
 $\vec{a}(-5, -1)$ y $\vec{b}(0, -3)$



2. Dadas las componentes de los vectores $\vec{s} = \vec{c} + \vec{d}$
 determina el vector suma gráficamente
 $\vec{c}(4,2)$ y $\vec{d}(3,0)$

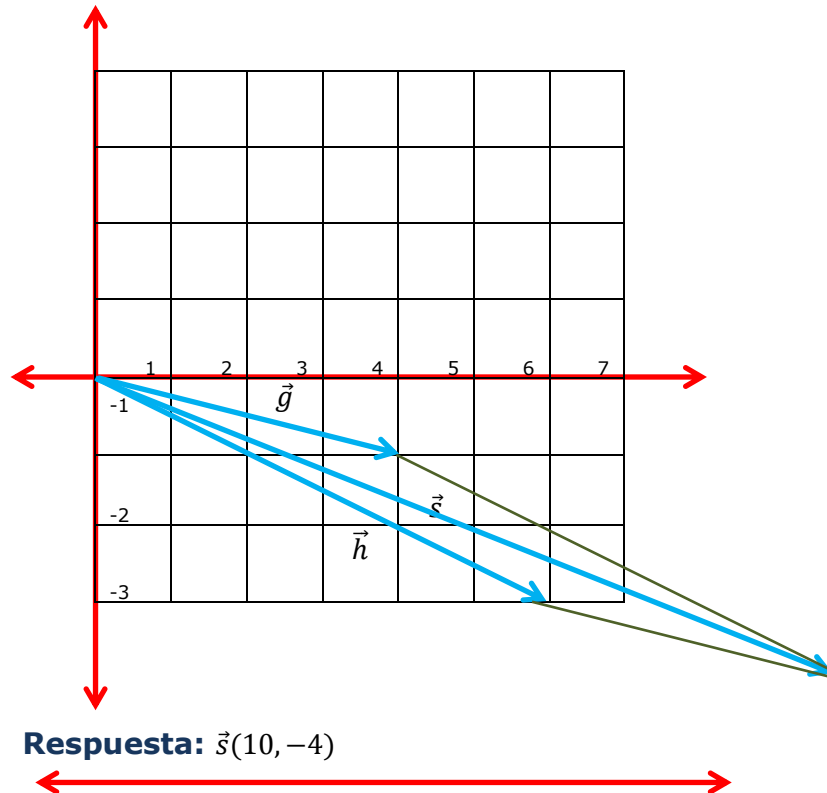


3. Dadas las componentes de los vectores $\vec{s} = \vec{e} + \vec{f}$ determina el vector suma gráficamente $\vec{e}(0,4)$ y $\vec{f}(-1,-2)$



Respuesta: $\vec{s}(-1,2)$

4. Dadas las componentes de los vectores $\vec{s} = \vec{g} + \vec{h}$ determina el vector suma gráficamente $\vec{g}(4,-1)$ y $\vec{h}(6,-3)$



Respuesta: $\vec{s}(10,-4)$

5. Efectúa la suma de vectores en forma analítica.

$$\vec{a}(-2,3) \text{ y } \vec{b}(0,2)$$

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{a} + \vec{b} = (-2 + 0, 3 + 2) = (-2, 5) \\ \vec{s} &= (-2, 5)\end{aligned}$$

Respuesta: $(-2, 5)$

6. Efectúa la suma de vectores en forma analítica.

$$\vec{m}(5, -3) \text{ y } \vec{n}(0, 8)$$

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{m} + \vec{n} = (5, -3) + (0, 8) = (5 + 0, -3 + 8) \\ &= (5, 5)\end{aligned}$$

Respuesta: $(5, 5)$

7. Efectúa la suma de vectores en forma analítica.

$$\vec{p}(0, 5) \text{ y } \vec{q}(0, 7)$$

$$\vec{s} = \vec{p} + \vec{q} = (0 + 0, 5 + 7) = (0, 12)$$

Respuesta: $(0, 12)$

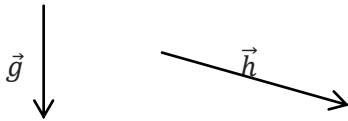
8. Efectúa la suma de vectores en forma analítica.

$$\vec{r}(-7, 1) \text{ y } \vec{t}(3, -7)$$

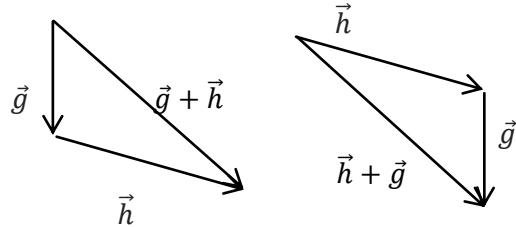
$$\vec{s} = \vec{r} + \vec{t} = (-7 + 3, 1 - 7) = (-4, -6)$$

Respuesta: $(-4, -6)$

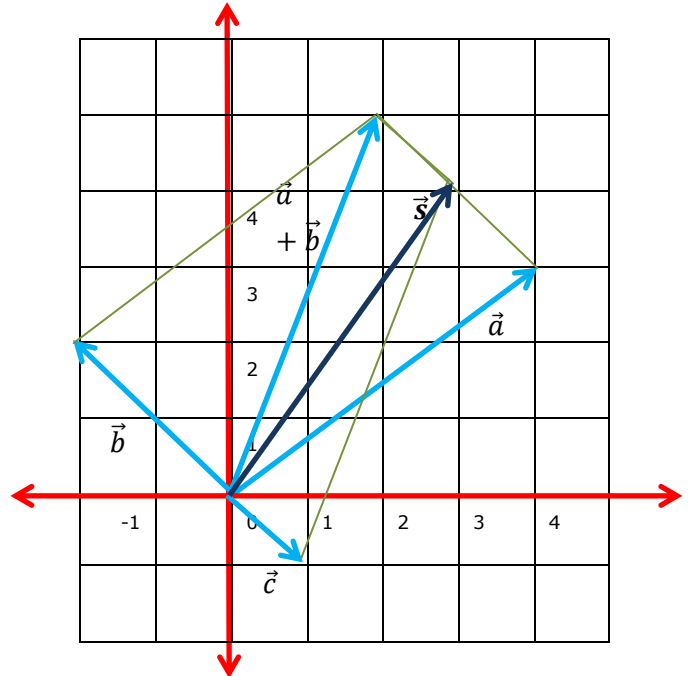
9. Comprueba la propiedad conmutativa gráficamente al sumar $\vec{g} + \vec{h}$



Respuesta:



- 10 Comprueba la propiedad asociativa al $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
 sumar los vectores $\vec{a}(4,3)$, $\vec{b}(-2,2)$
 y $\vec{c}(1,-1)$



$$\begin{aligned}
 [4+(-2), 3+2] + (1, -1) &= (4, 3) + [-2+1, 2+(-1)] \\
 (2, 5) + (1, -1) &= (4, 3) + (-1, 1) \\
 [2+1, 5+(-1)] &= [4+(-1), 3+1] \\
 (3, 4) &= (3, 4)
 \end{aligned}$$

Respuesta: (3,4)

Profesor Danesa Padilla

Versión Fecha 2015-10-08

Glosario

Método del paralelogramo: es un método de adición de vectores que genera un paralelogramo gráficamente si se dibuja la suma de dos vectores.

Resultante: la **resultante** es un vector que representa la suma de dos o más vectores.

Método del triángulo: es un método de adición de vectores que genera un triángulo gráficamente si se coloca el punto inicial del segundo vector como punto final del primero

Conmutativa: dado dos vectores \vec{a} y \vec{b} se cumple que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Asociativa: Dados los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} se cumple que $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Elemento Neutro: Al sumar el vector nulo $\vec{0}$ con cualquier vector \vec{a} se obtiene como vector suma el mismo vector \vec{a} .

Elemento Simétrico: en la adición de vectores siempre se cumple que al sumar un vector \vec{a} con su inverso $-\vec{a}$ se obtiene el vector nulo $\vec{0}$

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/geo/vec/a_e.html

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1bach/naturaleza/u-7.pdf>

