Materia: Matemática de Tercer Año.

Tema: Representación de números irracionales en la recta numérica

Una mañana en el barco de buceo, Cameron comenzó a hablar con otro niño llamado Chet. Chet y su familia eran de Colorado y Chet era apenas dos años mayor que Cameron. Los chicos entablaron una gran conversación sobre el buceo, los peces y las cosas que habían visto en sus viajes.

Después de un rato, vieron algunos delfines nadando con el barco. Esto es algo que sucede a menudo ya que a los delfines les encanta el agua que empuja los motores del barco por la parte trasera.

"¿Sabías que se puede nadar 0,83 millas en un minuto?" le pregunta Chet a Cameron.

"Realmente no sabía, pero si sabía que el pez espada puede nadar casi un kilometro en un minuto. Creo que el número exacto es $\frac{9}{20}$ de milla".

"Wow, cual puede nadar más rápido en un minuto?" pregunto Chet mientras pensaba en los cálculos.

En el momento en que llegaron a la zona de buceo, Cameron se había dado cuenta de cual es el que puede nadar más rápido.

Lo ha hecho? Los números que los niños están usando se llaman números racionales. Cuando entiendas los números racionales, también sabrá cómo averiguar qué puede nadar más lejos en un minuto. Presta atención, y esta lección le enseñara todo lo que necita saber sobre los números racionales.

Lo que aprenderás

En esta lección, aprenderá a hacer lo siguiente:

- Identificar un número racional como la relación de dos números enteros.
- Comparar y ordenar números racionales en la recta numérica.
- Identificar conmutativa, asociativa, inversa y las propiedades de identidad de la suma y la multiplicación de los números racionales.
- Aplicar las propiedades y el uso de orden de operaciones para evaluar expresiones numéricas y variables.

Tiempo de enseñar

I. **Identificar un número racional como el cociente de dos números enteros**

Algunos números se consideran ***números racionales***. **Un número racional es un número que puede ser escrito como una relación.**

¿Qué es una relación?

Una *relación* es una comparación de dos números. Por ejemplo, podrías descubrir que la proporción de niños y niñas en tu clase es de 12 a 13. Esa misma relación podría expresarse utilizando dos puntos, 12: 13, o como una fracción $\frac{12}{13}$.

De hecho, cualquier número que puede ser escrito como una relación de dos números enteros se clasifica como un número racional. Echemos un vistazo más de cerca a la forma de identificar un número racional.

¿Cómo podemos determinar si un número entero es un número racional?

Esa es una buena pregunta. Veamos un ejemplo a ver si podemos escribirlo como una razón.

Ejemplo

10

Este número puede ser escrito como una relación. Cada número entero se puede escribir más de 1. Eso significa que se puede escribir como una relación. Observe que la barra de fracción es una manera de saber si el número entero se puede escribir como una relación. En otras palabras, si puede ser escrito como una fracción, que es un número racional.

10 es un número racional.

Ejemplo

$-\frac{2}{3}$

Esta fracción es un número racional. Tenga en cuenta que está escrito como una relación ya. Estamos comparando el numerador y el denominador. Sí, es negativo. Eso está bien, porque podemos tener fracciones negativas y todavía son consideradas números racionales.

$-\frac{2}{3}$ **es un número racional.**

Ejemplo

0.687

Este decimal puede ser escrito como un número racional sobre 1000. Este es un número racional también.

0.687 es un número racional.

¿Hay otros?

Sí. ***Terminación de decimales*** **y** ***decimales se repiten*** **también son números racionales.**

- **Decimales terminales**, son decimales con un número determinado de dígitos, son siempre racionales. Por ejemplo, 0.007 es un decimal finito, por lo que es racional.

- **Decimales periodicos**, son aquellos decimales en los cuales uno o más dígitos se repiten, son siempre racionales. Por ejemplo, $0.\bar{3}$ es un decimal periódico en el que el dígito 3 se repite indefinidamente, por lo que es racional.

¿Hay números que no son racionales?
Sí. Algunos decimales no terminan y no se repiten. Ellos simplemente siguen y siguen para siempre. Se trata de un grupo especial de números llamados *números irracionales*. No son números racionales. Usted aprenderá más sobre ellos en una lección posterior.

4N. Ejercicios Lección
Determinar si cada uno de los siguientes números es un numero racional.

1. **-4**
2. $\frac{1}{3}$
3. **0.89765 ....**

Tómese unos minutos para revisar su trabajo con un compañero.

Escriba la definición de un número racional y cómo se puede saber si un número es racional o no. Asegúrate de incluir esta información en su cuaderno y luego continúe.

II. **Comparar y ordenar números racionales en la recta numérica**

Ahora que sabes cómo identificar un número racional, es posible que necesite ordenarlos o calcularlos. Por ejemplo, ¿qué pasa si se tiene una pérdida $\frac{1}{2}$ comparada con una pérdida de 0,34. Usted tendría que determinar que la pérdida es mayor.

La colocación de los números en la recta numérica puede ayudar a hacer esto.

Repasemos los símbolos de desigualdad que pueden ayudar a comparar y ordenar números racionales:
> Significa *es mayor que*.
< Significa *es inferior*.
= Significa *es igual que*.

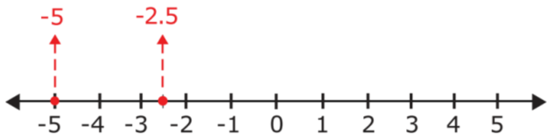
Ejemplo

Seleccione el símbolo de desigualdad que va en el espacio en blanco para hacer esta declaración verdadera.

-2.5 ____ -5

En primer lugar, dibujar una recta numérica -5 a 5.

Coloque los números de -2,5 y -5 en la recta númerica. Dado que $0.5 = \frac{1}{2}, \ -2.5$ estara a medio camino entre -2 y -3 en la recta numérica.



Como -2,5 se encuentra más a la derecha en la recta numérica que -5, significa que -2,5 es mayor que -5.

El símbolo > va en el blanco ya que $-2.5 > -5$.

Ejemplo

Ordene estos números racionales de menor a mayor.

$$\frac{4}{5} \qquad 0.6 \qquad 1 \qquad 0.\bar{6}$$

A menudo es bastante fácil de colocar decimales en la recta numérica que está dividida de 10 en 10.

Por lo tanto, podemos dibujar una recta numérica de 0 a 1 y se dividirla en décimas. Entonces podemos colocar los cuatro números en la misma.

En primer lugar, hay que cambiar $\frac{4}{5}$ a una fracción con un denominador de 10:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10}$$

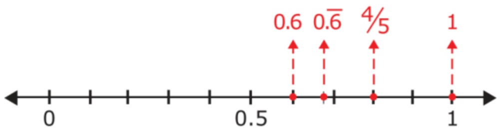
Como ocho décimas es equivalente a $\frac{4}{5}$, podemos encontrar ocho décimas en la recta numérica y colocamos $\frac{4}{5}$ allí.

0.6 significa seis décimas. Así que podemos encontrar seis décimas en la recta numérica y colocar 0.6 allí.

1 se muestra en la recta numérica, por lo que puede añadir una línea de puntos para mostrar ese número también.

$0.\bar{6}$ Significa 0.666... Por lo tanto, $0.\bar{6}$ es un poco mayor que seis décimas, pero menos que siete décimas. Podemos colocar $0.\bar{6}$ más o menos donde debe estar en la recta numérica.

La recta numérica se vería así cuando terminemos.



En la recta numérica, podemos ver qué $0.6 < 0.\bar{6} < \frac{4}{5} < 1$.

Así que, ordenados de menor a mayor, los números son $0.6,\ 0.\bar{6},\ \frac{4}{5},\ 1$.

Sí. Pensando en las relaciones entre los números (en este caso, ¿cómo es cada uno más grande o más pequeño en relación a los otros números) le ayudará. Así es como se puede estar seguro de que los números están en el orden correcto. Recuerde, son todos números racionales!

<u>4O. Ejercicios Lección</u>

Compara los siguientes números racionales.

1. $-.7$ _____ $-\frac{7}{10}$
2. $.34$ _____ $\frac{1}{2}$
3. 67 _____ -10

Tómese unos minutos para revisar sus respuestas con un compañero.

III. **<u>Identificar y aplicar propiedades con números racionales</u>**

A continuación, vamos a revisar algunas de las propiedades de los números. Usted puede recordar estas propiedades por el trabajo que ha hecho con los números enteros. En esta sección, veremos cómo estas propiedades pueden ayudar a hacer cálculos con números racionales, también.

Estas son las propiedades que vamos a utilizar en esta sección.

- ***La propiedad conmutativa de la suma*** establece que los números que se suman se puede sumar en cualquier orden. ***La propiedad conmutativa de la multiplicación*** dice que los números que se multiplican se puede multiplicar en cualquier orden.

Ejemplos

$0.3 + 7.5 = 7.5 + 0.3$

$\frac{1}{2} \times (-3) = -3 \times \frac{1}{2}$

- ***La propiedad asociativa de la suma*** establece que la agrupación de los números que se están sumando no importa. ***La propiedad asociativa de la multiplicación*** establece que la agrupación de los números que se multiplican no importa.

Ejemplos

$\left(\frac{3}{10} + \frac{11}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \left(\frac{11}{5} + \frac{1}{5}\right)$

$(-3 \times 4) \times 10 = -3 \times (4 \times 10)$

- ***La propiedad inversa de la suma*** establece que cuando se añade un número a su opuesto (o ***inverso aditivo***), la suma es cero.

Ejemplo

$4 + (-4) = 0$

- ***La propiedad inversa de la multiplicación*** establece que cuando un número se multiplica por su ***recíproco*** (o ***inverso multiplicativo***), el producto es 1. Usted puede encontrar el recíproco de una fracción girándola. Por ejemplo, el inverso de $\frac{7}{5}$se puede encontrar volteando la fracción $\frac{5}{7}$.

Ejemplo

$\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 1$

- ***La propiedad de identidad de la adición*** establece que cuando se añade cero a cualquier número, la suma es ese número.

Ejemplo

$3\frac{1}{25} + 0 = 3\frac{1}{25}$

- ***La propiedad de identidad de la multiplicación*** establece que cuando un número se multiplica por 1, el producto es ese número.

Ejemplo

$0.16 \times 1 = 0.16$

Ejemplos

Identificar la propiedad numérica que cada ecuación ilustra.

a. $-159 + 0 = -159$

b. $(0.3+1.2)+0.8=0.3+(1.2+0.8)$

c. $8\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times 8$

d. $6\cdot\frac{1}{6}=1$

Considere la ecuación en *a* .

En $-159+0=-159$, se suma un número entero negativo a cero y la suma es igual al número entero negativo.
Este es un ejemplo de la propiedad de identidad de la suma.

Considere la ecuación de *b*.

En $(0.3+1.2)+0.8=0.3+(1.2+0.8)$, los paréntesis indican que las cantidades permanecen iguales incluso cuando los números se agrupan de diferentes maneras.

Este es un ejemplo de la propiedad asociativa de la suma.

Considere la ecuación en *c*.

En $8\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times 8$el orden de los números que se multiplican se ha cambiado, pero siguen siendo iguales.

Este es un ejemplo de la propiedad conmutativa de la multiplicación.
Considere la ecuación *d*.

En $6\cdot\frac{1}{6}=1$, el número entero 6 se multiplica por su recíproco, $\frac{1}{6}$. (Dado que $6=\frac{6}{1}$, su recíproco $\frac{1}{6}$.)

Este es un ejemplo de la propiedad inversa de la multiplicación.
No es suficiente ser capaz de identificar las diferentes propiedades de los números. También es necesario considerar cómo se pueden aplicar estas propiedades. La siguiente sección mostrará cómo estas propiedades de los números pueden hacer algunos cálculos más fáciles.

IV. **Aplicar las propiedades y uso Orden de operaciones para evaluar expresiones numéricas y variables**

Las propiedades pueden ayudarle a evaluar expresiones numéricas. ¿Te acuerdas de lo que es una expresión numérica es? **Una *expresión numérica*s es una frase que contiene**

los números y las operaciones. Ahora que usted sabe acerca de los números racionales, puede verlos en expresiones numéricas también.

Echemos un vistazo a la aplicación de las propiedades en un ejemplo que es una expresión numérica.

Ejemplo

Utilice una o varias propiedades de los números para que puedas encontrar el valor de esta expresión.

$(0.3892 \times 7) \times \frac{1}{7}$

Debemos tener en cuenta que estos números racionales se puede multiplicar fácilmente.

Multiplicar un número decimal de cuatro dígitos, como 0,3892, llevaría mucho tiempo.

Por lo tanto, utilizaremos la **propiedad asociativa** para agrupar los números de manera diferente.

$(0.3892 \times 7) \times \frac{1}{7} = 0.3892 \times \left(7 \times \frac{1}{7}\right)$

Se multiplica la expresión dentro de los paréntesis $\left(7 \times \frac{1}{7}\right)$, en primer lugar.

7 es el recíproco de $\frac{1}{7}$. Así que, de acuerdo con la **propiedad inversa de la multiplicación** , el producto de los dos números será 1.

$0.3892 \times \left(7 \times \frac{1}{7}\right) = 0.3892 \times 1$

Ahora, es necesario multiplicar el decimal por 1. La **propiedad de identidad de la multiplicación** establece que cualquier número multiplicado por 1 es igual a sí mismo.

$0.3892 \times 1 = 0.3892$

El valor de la expresión es 0,3892.

Usted podría haber multiplicado ese decimal por 7 y luego multiplicar ese producto por $\frac{1}{7}$para encontrar la respuesta.

Sí. Usted puede resolverlo sin aplicar lo que sabe acerca de las propiedades, pero el uso de las propiedades es definitivamente más simple en este ejemplo.

Al evaluar expresiones, también es importante tener en cuenta el ***orden de las operaciones***. Repasemos este orden a continuación.

- En primer lugar, los cálculos que están agrupando dentro de símbolos, como paréntesis.
- En segundo lugar, evaluar los exponentes.
- En tercer lugar, multiplicar y dividir en orden de izquierda a derecha.

- Por último, sumar y restar en orden de izquierda a derecha.

También podemos aplicar propiedades cuando se evalúan expresiones variables. Recuerde que una expresión variable es una expresión con números, variables y operaciones.

Ejemplo

Encuentre el valor de esta expresión. Asegúrese de utilizar el orden correcto de las operaciones.

$-12 \div (8-6) \times p$

De acuerdo con el orden de las operaciones, debe hacer el cálculo entre paréntesis primero. Por lo tanto, restar.

$-12 \div (8-6) \times p = -12 \div 2 \times p$

No hay exponentes para evaluar. Por lo tanto, el siguiente paso consiste en multiplicar y dividir en orden de izquierda a derecha.

$-12 \div 2 \times p = -6 \times p = -6p$

El valor de la expresión es $-6p$.

Ejemplo de la vida real Completado

Comparando Distancias

Aquí está el problema original una vez más. Vuelva a leer y subrayar la información importante.

Un mañana mientras estaba en el barco de buceo, Cameron comenzó a hablar con otro niño llamado Chet. Chet y su familia eran de Colorado y Chet era apenas dos años mayor que Cameron. Los chicos entablaron una gran conversación sobre el buceo, los peces y las cosas que habían visto en sus inmersiones.

Después de un rato, vieron algunos delfines nadando con el barco. Esto es algo que sucede a menudo ya que a los delfines les encanta el agua que se genera por el motor en la parte trasera del barco.

"¿Sabías que se puede nadar 0,83 millas en un minuto? " Chet preguntó Cameron.

"Realmente, no sabía eso. Yo sé que un pez puede nadar casi un kilómetro en un minuto. Creo que el número exacto es $\frac{9}{20}$ de milla".
" Wow, se puede nadar más lejos en un minuto?", preguntó Chet, pensando cuidadosamente a través de los cálculos.

En el momento en que llegaron a la zona de buceo, Cameron se había dado cuenta que se puede nadar más lejos en un minuto.

Para saber qué se puede nadar más lejos en un minuto, tendremos que comparar estos dos números racionales.

Un delfín = 0.83 de milla en un minuto
Un pez $= \frac{9}{20}$**de una milla en un minuto**
Para entender esto, primero tenemos que cambiar la fracción en un decimal de modo que ambos números están en la misma forma.

$\frac{9}{20} = \frac{45}{100} = .45$
A continuación, se comparan 0,83 a 0,45.
0,83> 0,45
Un delfín puede nadar más lejos que un pez espada en un minuto.

Vocabulario

Estas son las palabras del vocabulario que se encuentran en esta lección.

Número racional

Cualquier número positivo o negativo que puede ser escrito como una relación.

Proporción

Una comparación entre dos cantidades. Puede ser escrito usando la palabra "hasta", con dos puntos, o el uso de una barra de fracción

Decimal Exacto

Un decimal que tiene un final definitivo

Decimal Periódico

Un decimal, donde algunos de los dígitos se repiten.

Número irracional

Un decimal que no tiene fin y no se repite, pero continúa indefinidamente.

Propiedad conmutativa de la suma

Establece que el orden en que se suman los números no cambia su resultado.

Propiedad conmutativa de la multiplicación

Establece que el orden en que se multiplican los valores no cambia el producto

Propiedad asociativa de la suma

Las agrupaciones de los números que se suman no cambia la resultado

Propiedad asociativa de la multiplicación

Las agrupaciones de los números que multiplicados no cambia el producto

Propiedad inversa de la suma

Cualquier número sumando a su contrario es cero.

Propiedad inversa de la multiplicación

Cualquier número multiplicado por su recíproco es uno.

Recíproco

Un número volteado o invertida

Propiedad de identidad de la suma

Cualquier número más cero da como resultado el mismo número

Propiedad de identidad de la multiplicación

Cualquier número multiplicado por uno da como resultado el mismo número

Expresión numérica

Una frase que contiene números y operaciones

Expresión Variable

Una frase que contiene números, variables y operaciones

Integración de la Tecnología

Este video muestra cómo comparar números racionales en la recta numérica.

Khan Academy, comparación de números racionales

Hora de practicar

Instrucciones: Escribe cada número como el cociente de dos enteros (una fracción) para demostrar que cada número es racional.

1. -11

2. $3\frac{1}{6}$

3. 9

4. 0.08

5. - 0.34

6. 0.678

7. $\frac{4}{5}$

8. -19

9. 25

10. -7

Instrucciones: Elige el símbolo de desigualdad (>, <o =) que va en el espacio en blanco para que cada declaración sea CORRECTA.

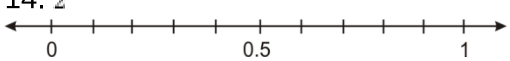
11. 1.1 ____ $1\frac{1}{10}$

12. -2 ____ $1\frac{1}{3}$

13. $\frac{2}{5}$ ____ 0.3

Instrucciones: Coloque cada número racional en la recta numérica. Luego ordénelos de mayor a menor.

14. $\frac{1}{2}$ $\quad 0.9 \quad 0 \quad 0.\bar{9}$



Instrucciones: Para cada ecuación, identificar la propiedad numérica que se muestra.

15. $\left(-3\frac{1}{2}\right) \times 1 = -3\frac{1}{2}$

16. $\frac{8}{5} \times \frac{5}{8} = 1$

17. $(22 + 4) + 6 = 22 + (4 + 6)$

18. $9.5 + 5.5 = 5.5 + 9.5$

19. $17+(-17)=0$

<u>Instrucciones:</u> Simplifique cada expresión. Considere las propiedades numéricas y el orden de las operaciones en esta actividad.

20. $-6a+(8-4)$

21. $-12a \div (3a+a)$