

Materia: Matemática de 5to

Tema: Operaciones con Polinomios

Objetivos

Los objetivos de la lección son:

- Suma y resta de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- Productos especiales $[(x + y)(x - y); (x + y)^2 y (x - y)^2]$

Suma y resta de polinomios

Introducción

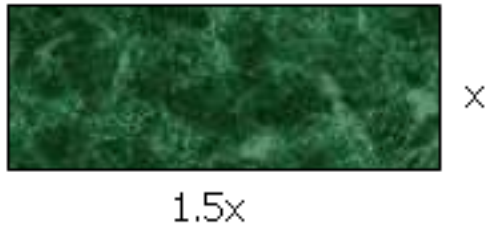
En este concepto comenzarás el estudio de los polinomios por aprender a sumar y restar polinomios. La palabra polinomio en realidad proviene del griego *poli* que significa "muchos" y la palabra latina *binomio* que significa "binomial". Un monomio puede ser un número o una variable (como x) o puede ser el producto de un número y una variable. Con monomios, los exponentes son siempre en números enteros. Así que $3x^2$ es un monomio, pero $3x^{\frac{1}{2}}$ no lo es. Un binomio tiene dos términos. Son las expresiones matemáticas que tienen la forma $(x + a)$ como $(x + 1)$ o $(2x + 3)$. Un trinomio tiene tres términos. La expresión $2x^2 + 3x - 4$ tiene tres términos, por lo que es un trinomio. Un polinomio, por definición, es también un monomio o la suma de un número de monomios. Así que $3x^2$ se puede considerar un polinomio, $2x + 3$ se puede considerar un polinomio, y $2x^2 + 3x - 4$ se puede considerar un polinomio.

En esta lección, vas a aprender a sumar y restar polinomios. Una vez que hayas dominado este concepto, podrás llevar a cabo la multiplicación de polinomios utilizando la propiedad distributiva.

Finalmente, en esta lección, tendrás la oportunidad de explorar algunos polinomios especiales. Estos polinomios tendrán la forma $(x + y)(x - y)$, $(x + y)^2$ y $(x - y)^2$. Ahora vamos a empezar!

Marco Teórico

Imagina que vas a construir un jardín rectangular en tu patio trasero. El jardín es de 2m más grande que el ancho por 1,5. Escribe una expresión para mostrar el área del jardín.



$$\text{Area} = l \times w$$

$$\text{Area} = (1.5x + 2)x$$

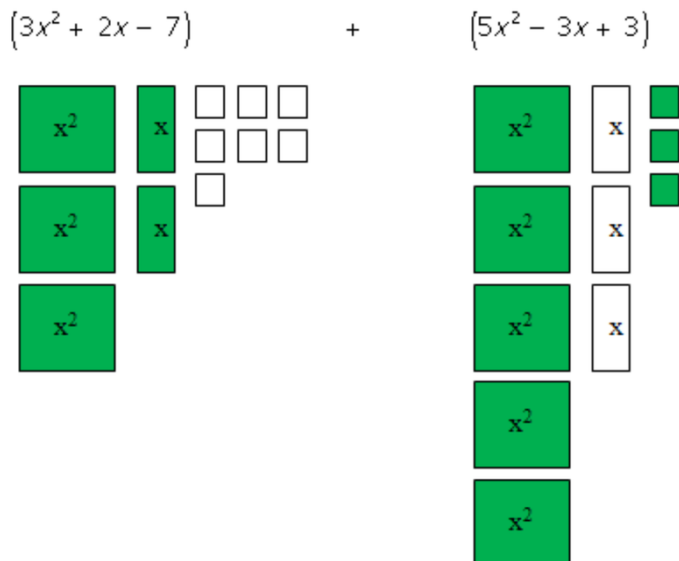
$$\text{Area} = 1.5x^2 + 2x$$

Ejemplo A

Halla la suma de $(3x^2 + 2x - 7) + (5x^2 - 3x + 3)$

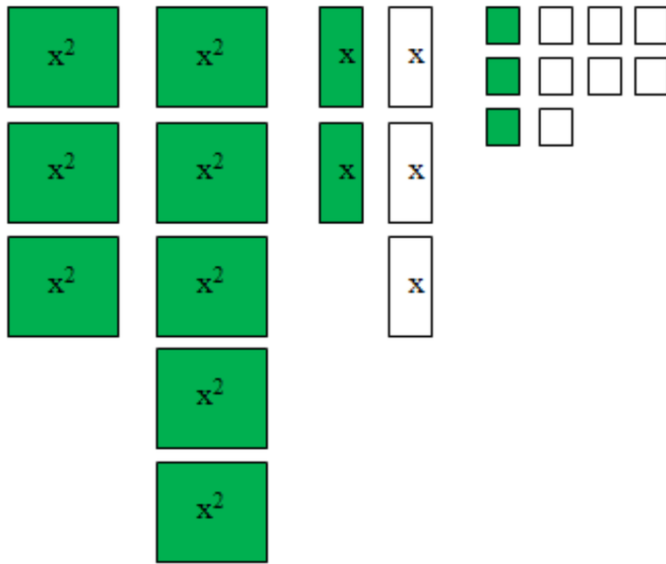
Recuerdas que en los capítulos anteriores utilizamos fichas de álgebra para resolver ecuaciones con variables en un lado de la ecuación? Las fichas de álgebra también se pueden utilizar para sumar y restar polinomios. Mira el ejemplo de abajo.

En primer lugar, vamos a poner las fichas de álgebra que corresponden a sus polinomios.



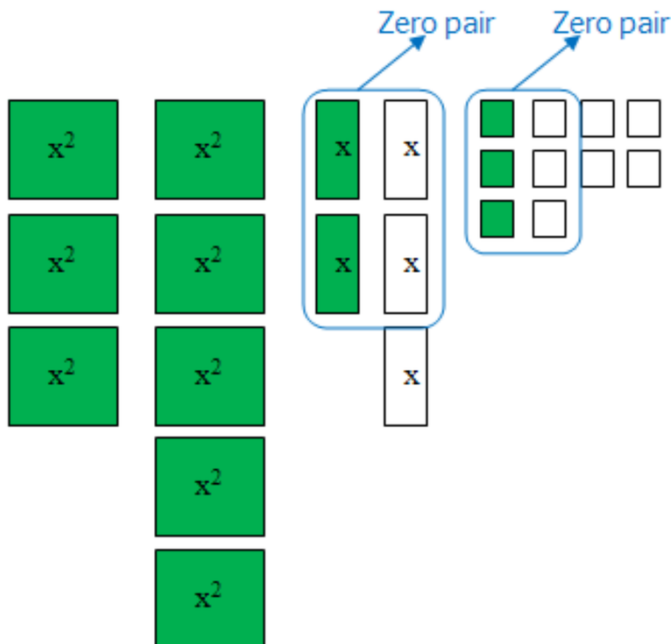
En segundo lugar, vamos a cambiar su posición para que puedas combinar los términos semejantes (¿suena familiar?).

$$3x^2 + 5x^2 + 2x - 3x + 3 - 7$$

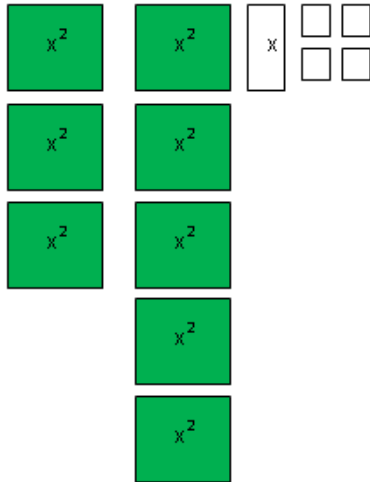


Por último, elimina las fichas que componen los pares cero. Esto te dejará con el polinomio final, o su respuesta.

$$3x^2 + 5x^2 + 2x - 3x + 3 - 7$$



¿Qué queda?



$$(3x^2 + 2x - 7) + (5x^2 - 3x + 3) = 8x^2 - x - 4$$

Ejemplo B

Encuentra la diferencia de $(5x^2 + 8x + 6) - (4x^2 + 5x + 4)$

Para este ejercicio probaremos un método diferente. Vamos a tratar el método vertical en el que se alinean los polinomios verticalmente y luego se restan.

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 8x + 6 \\ - (4x^2 + 5x + 4) \\ \hline x^2 + 3x + 2 \end{array}$$

Remember if we remove the brackets $-(4x^2 + 5x + 4)$ becomes $-4x^2 - 5x - 4$

Ejemplo C

Halla la suma de $(3x^2 + 6x^2 - 7x + 5) + (4x^2 + 3x - 8)$

Probaremos otro método. Vamos a tratar el método horizontal en el que se alinean los polinomios horizontalmente y luego se suman.

$$\begin{aligned} (3x^3 + 6x^2 - 7x + 5) + (4x^2 + 3x - 8) &= 3x^3 + (6x^2 + 4x^2) + (-7x + 3x) + (5 - 8) \\ &= 3x^3 + 10x^2 - 4x - 3 \end{aligned}$$

Palabras Clave

Binomio

Un **binomio** tiene dos términos que se agregan o se restan entre sí. Cada término de un binomio es una variable (x), un producto de un número y una variable ($4x$),

o el producto de múltiples variables con o sin un número ($4x^2y + 3$). Uno de los términos en el binomio puede ser un número.

Monomio

Un **monomio** puede ser un número o una variable (como x) o puede ser el producto de un número y una variable (como $3x$ o $3x^2$). Un monomio tiene un solo término.

Polinomio

Un **polinomio**, por definición, es también un monomio o la suma de un número de monomios. Así que $3x^2$ se puede considerar un polinomio, $2x + 3$ se puede considerar un polinomio, y $2x^2 + 3x - 4$ se puede considerar un polinomio.

Trinomio

Un **trinomio** tiene tres términos ($4x^2 + 3x - 7$). Cada término de un trinomio puede ser una variable (x), un producto de un número y una variable ($3x$), o el producto de múltiples variables con o sin un número ($4x^2$). Uno de los términos en el trinomio puede ser un número (-7).

Variable

Una **variable de** es una cantidad desconocida en una expresión matemática. Se representa mediante una letra. Se conoce como el coeficiente literal.

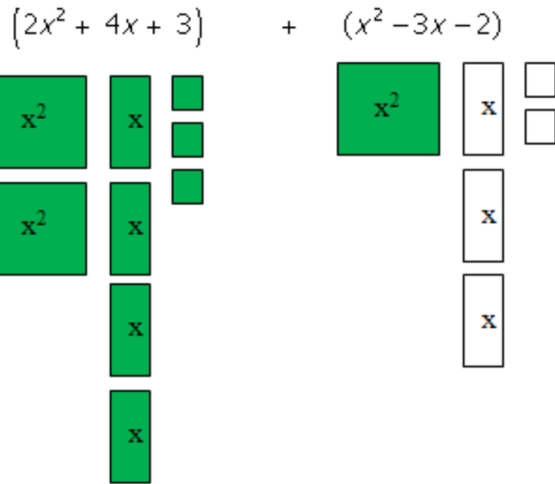
Ejercicios Resueltos

1. Usa fichas de álgebra para sumar los polinomios $(2x^2 + 4x + 3) + (x^2 - 3x - 2)$.
2. Utiliza el método vertical para restar los polinomios $(5x^2 - 9x + 7) - (3x^2 - 5x + 6)$.
3. Utiliza el método horizontal para sumar el polinomio $(8x^3 + 5x^2 - 4x + 2) + (4x^3 + 7x - 5)$.

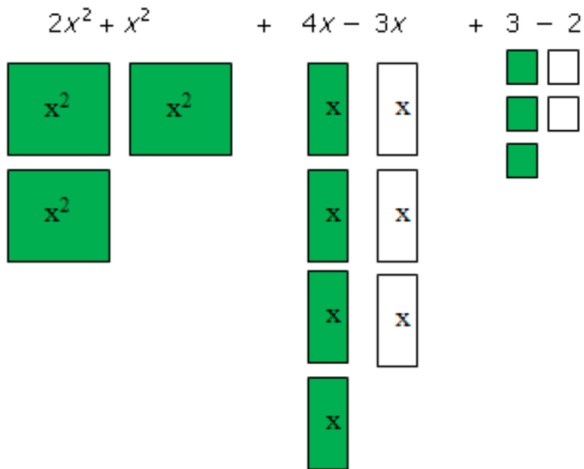
Respuestas

1. $(2x^2 + 4x + 3) + (x^2 - 3x - 2)$

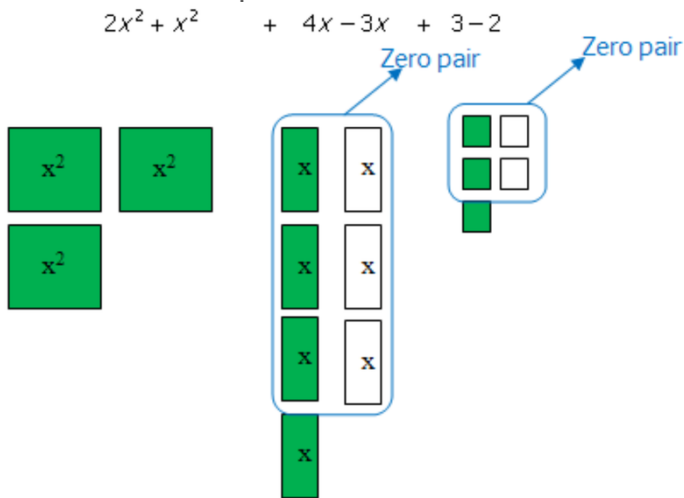
Paso 1: Configura las fichas de álgebra



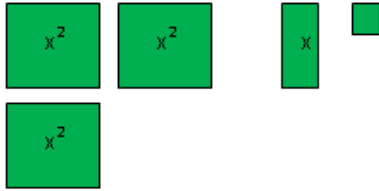
Paso 2: reorganiza los cuadros para combinar términos semejantes



Paso 3: Quita los pares cero



Paso 4: Observa lo que queda!



$$(2x^2 + 4x + 3) + (x^2 - 3x - 2) = 3x^2 + x + 1$$

$$2. (5x^2 - 9x + 7) - (3x^2 - 5x + 6)$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 9x + 7 \\ - (3x^2 - 5x + 6) \\ \hline 2x^2 - 4x + 1 \end{array} \implies \begin{array}{r} 5x^2 - 9x + 7 \\ -3x^2 + 5x - 6 \\ \hline 2x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

$$\text{Por lo tanto: } (5x^2 - 9x + 7) - (3x^2 - 5x + 6) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$3. (8x^3 + 5x^2 - 4x + 2) + (4x^3 + 7x - 5)$$

$$(8x^3 + 5x^2 - 4x + 2) + (4x^3 + 7x - 5) = (8x^3 + 4x^3) + (5x^2) + (-4x + 7x) + (2 - 5)$$

$$(8x^3 + 5x^2 - 4x + 2) + (4x^3 + 7x - 5) = 12x^3 + 5x^2 + 3x - 3$$

Resumen

Al sumar y restar polinomios, puede utilizar fichas de álgebra para ayudarte a visualizar el problema o puedes utilizar los métodos verticales u horizontales. Para utilizar fichas de álgebra, simplemente coloca las baldosas hasta que coincidan con sus polinomios y elimina los pares que suman cero (llamado los pares cero). Lo que queda es la respuesta al problema. Para utilizar el método vertical, simplemente llena los polinomios en una columna vertical y suma o resta los términos semejantes. Para utilizar el método horizontal, simplemente llena los polinomios en una fila horizontal y suma o resta los términos semejantes.

Ejercicios

Usa fichas de álgebra para resolver los siguientes problemas.

- $(x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 3x + 7)$
- $(2r^2 + 6r + 7) + (3r^2 + 5r + 8)$
- $(3t^2 - 2t + 4) + (2t^2 + 5t - 3)$
- $(4s^2 - 2s - 3) + (5s^2 + 7s - 6)$
- $(5y^2 + 7y - 3) + (-2y^2 - 5y + 6)$

Utiliza el método vertical para resolver cada uno de los siguientes problemas.

- $(6x^2 + 36x + 13) + (4x^2 + 13x + 33)$
- $(12a^2 + 13a + 7) + (9a^2 + 15a + 8)$
- $(9y^2 - 17y - 12) + (5y^2 + 12y + 4)$
- $(11b^2 + 7b - 12) - (15b^2 - 19b - 21)$
- $(25x^2 + 17x - 23) - (-14x^3 - 14x - 11)$

Utiliza el método horizontal para resolver cada uno de los siguientes problemas.

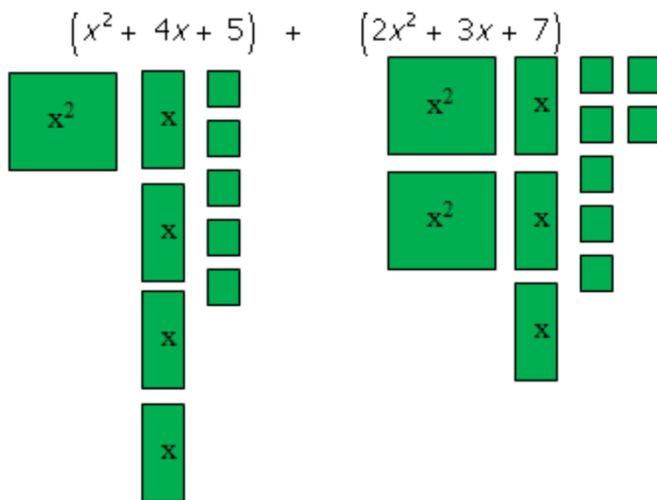
- $(-3y^2 + 10y - 5) + (5y^2 + 5y + 8)$
- $(-7x^2 - 5x + 11) + (5x^2 + 4x - 9)$
- $(9a^3 - 2a^2 + 7) + (3a^2 + 8a - 4)$
- $(3x^2 - 2x + 4) - (x^2 + x - 6)$
- $(4s^3 + 4s^2 - 5s - 2) - (-2s^2 - 5s + 6)$

Respuestas

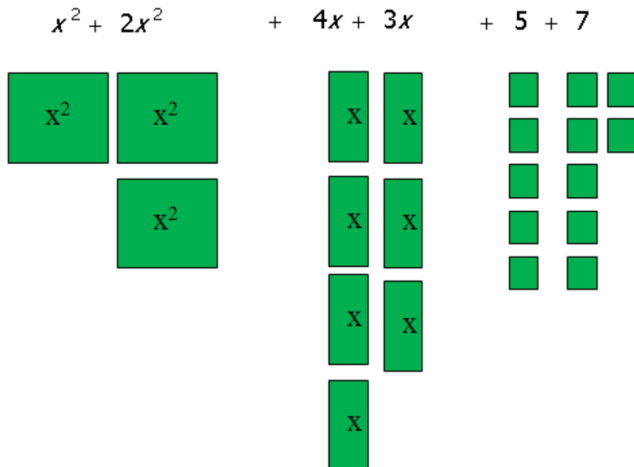
Uso de las fichas de álgebra

- $(x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 3x + 7)$

Paso 1: Configura las fichas de álgebra

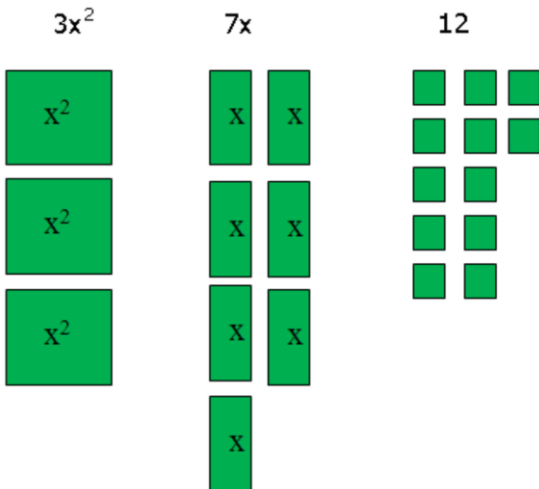


Paso 2: reorganizar los cuadros para combinar términos semejantes



Paso 3: Retira los pares cero (no hay ninguno)

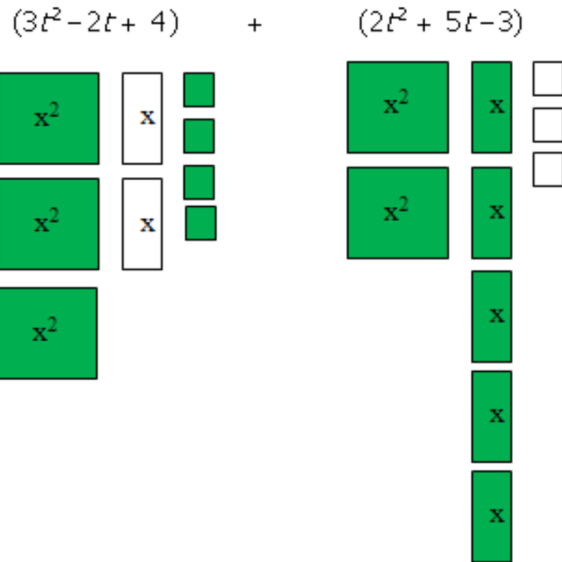
Paso 4: Observa lo que queda!



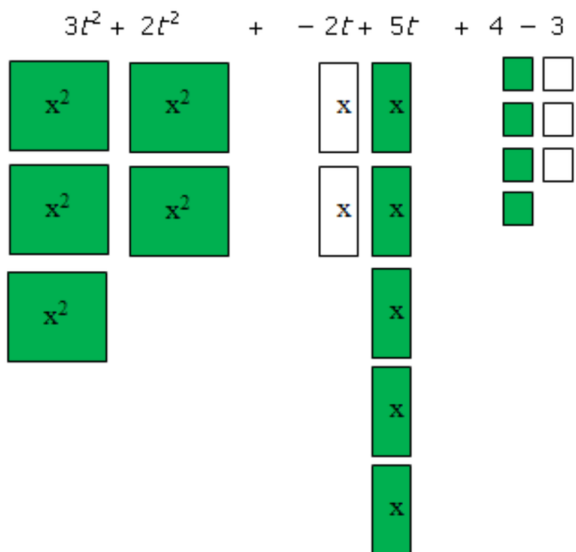
$$(x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 3x + 7) = 3x^2 + 7x + 12$$

3. $(3t^2 - 2t + 4) + (2t^2 + 5t - 3)$

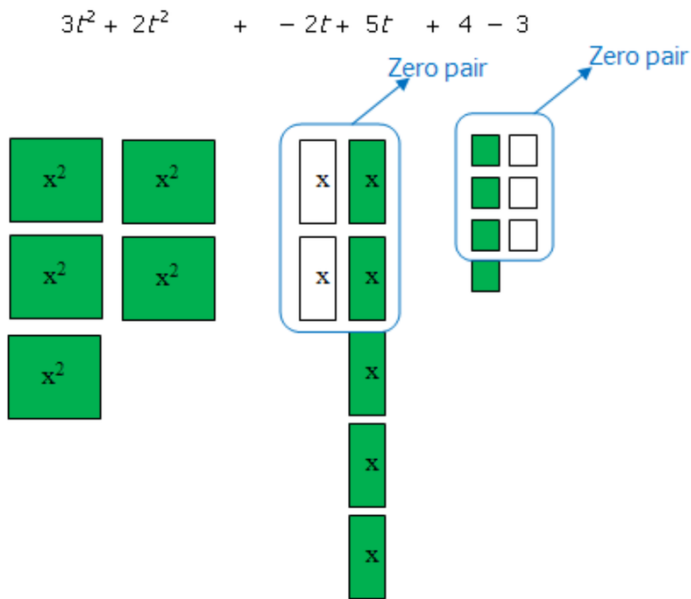
Paso 1: Configura las fichas de álgebra



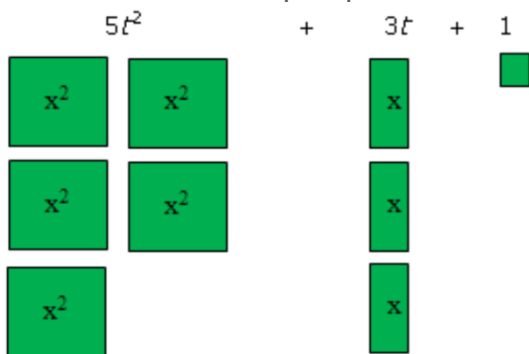
Paso 2: reorganiza los cuadros para combinar los términos semejantes



Paso 3: Quita los pares cero



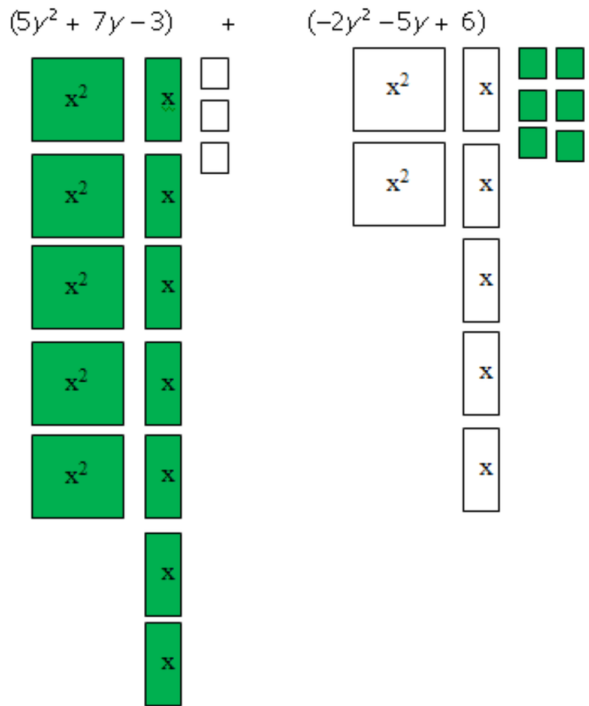
Paso 4: Observa lo que queda!



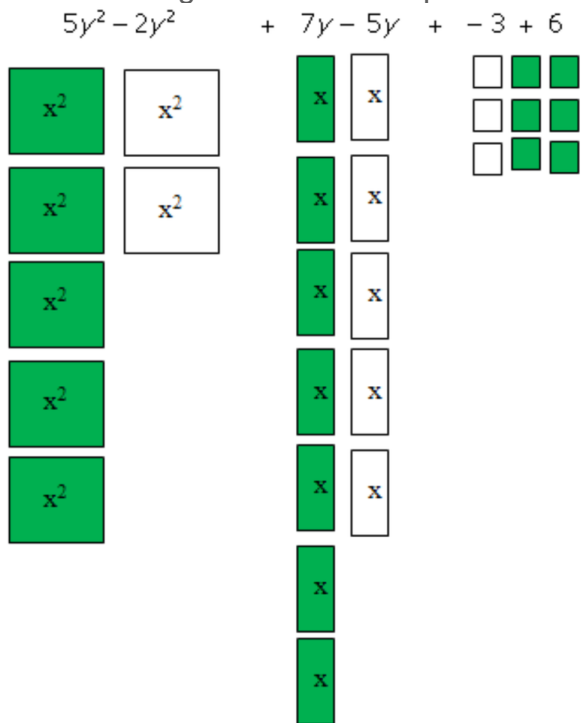
$$(3t^2 - 2t + 4) + (2t^2 + 5t - 3) = 5t^2 + 3t + 1$$

5. $(5y^2 + 7y - 3) + (-2y^2 - 5y + 6)$

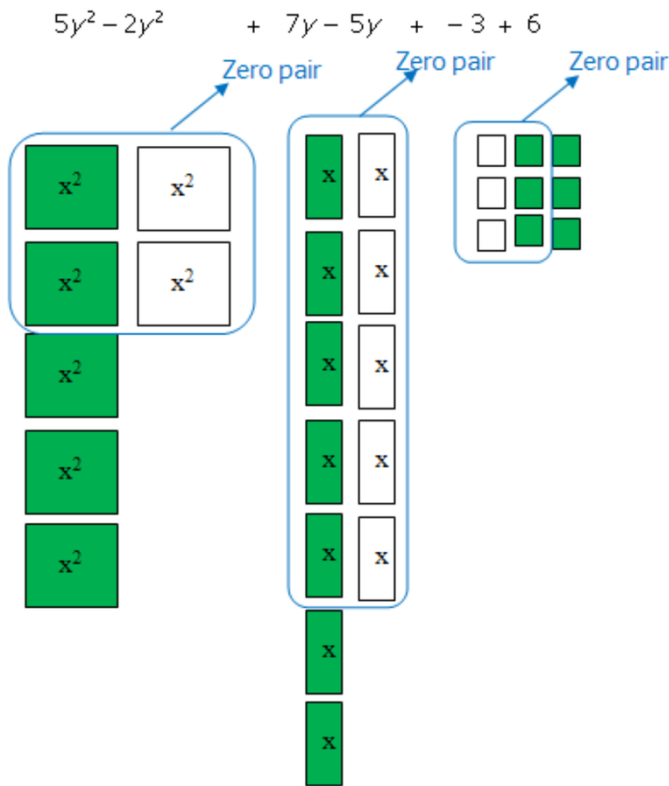
Paso 1: Configura las fichas de álgebra



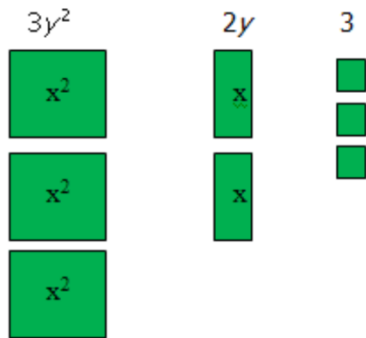
Paso 2: Reorganiza las fichas para combinar los términos semejantes



Paso 3: Quita los pares cero



Paso 4: Observa lo que queda!



$$(5y^2 + 7y - 3) + (-2y^2 - 5y + 3) = 3y^2 + 2y + 3$$

Utilizando el método vertical de

1. $(6x^2 + 36x + 13) + (4x^2 + 13x + 33)$

$$\begin{array}{r} 6x^2 + 36x + 13 \\ +4x^2 + 13x + 33 \\ \hline 10x^2 + 49x + 46 \end{array}$$

3. $(9y^2 - 17y - 12) + (5y^2 + 12y + 4)$

$$\frac{9y^2 - 17y - 12}{+5y^2 + 12y + 4}$$

$$14y^2 - 5y - 8$$

$$5. (25x^2 + 17x - 23) - (-14x^3 - 14x - 11)$$

$$\begin{array}{r} 25x^2 + 17x - 23 \\ -(-14x^3 - 14x - 11) \\ \hline \end{array} \implies \begin{array}{r} 25x^2 + 17x - 23 \\ +14x^3 \quad + 14x + 11 \\ \hline 14x^3 + 25x^2 + 31x - 12 \end{array}$$

Utilizando el método horizontal

$$1. (-3y^2 + 10y - 5) + (5y^2 + 5y + 8)$$

$$(-3y^2 + 10y - 5) + (5y^2 + 5y + 8) = (-3y^2 + 5y^2) + (10y + 5y) + (-5 + 8)$$

$$= 2y^2 + 15y + 3$$

$$3. (9a^3 - 2a^2 + 7) + (3a^2 + 8a - 4)$$

$$(9a^3 - 2a^2 + 7) + (3a^2 + 8a - 4) = (9a^3) + (-2a^2 + 3a^2) + (8a) + (7 - 4)$$

$$= 9a^3 + a^2 + 8a + 3$$

$$5. (4s^3 + 4s^2 - 5s - 2) - (-2s^2 - 5s + 6)$$

$$(4s^3 + 4s^2 - 5s - 2) - (-2s^2 - 5s + 6) = (4s^3 + 4s^2 - 5s - 2) + (+2s^2 + 5s - 6)$$

$$= (4s^3) + (4s^2 + 2s^2) + (-5s + 5s) + (-2 - 6)$$

$$= 4s^3 + 6s^2 - 8$$

Multiplicación de polinomios

Introducción

En este segundo concepto de la lección **Operaciones con polinomios**, se aprenderá cómo multiplicar polinomios. Al multiplicar polinomios, se utiliza la propiedad distributiva. Recuerde que la propiedad distributiva que el producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos individuales del número y de los sumandos. En otras palabras, si se va a multiplicar $3 \times (5x + 2)$ que se obtendría $15x + 6$. Sees han visto la propiedad distributiva antes, pero en esta lección aplicarlo a multiplicar binomios para obtener polinomios grandes o trinomios multiplicadores y binomios para obtener polinomios con grados superiores a 2.

Dirección

Jack le pidió que encuadrar una foto. Se le dijo que la relación de altura y ancho de la estructura iba a ser 5 pulgadas más largo que el ancho de cristal y 7 pulgadas más largo que la altura del cristal. Jack mide el vidrio y encuentra la relación de altura a anchura es de 04:03. Escribe la expresión para determinar el área del marco de la imagen.

¿Qué se sabe?



La anchura es de 5 pulgadas más largo que el cristal

La altura es de 7 pulgadas más largo que el vidrio

El vidrio tiene una relación de altura a anchura de 4:03

Las ecuaciones:

La altura del marco de la imagen es $4x + 7$

El ancho del marco es $3x + 5$

La fórmula:

$$\text{Area} = w \times h$$

$$\text{Area} = (3x + 5)(4x + 7)$$

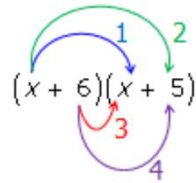
$$\text{Area} = 12x^2 + 21x + 20x + 35$$

$$\text{Area} = 12x^2 + 41x + 35$$

Ejemplo A

Usa la propiedad distributiva para hallar el producto de $(x + 6)(x + 5)$

Recuerde que debe responder a esta pregunta, que va a utilizar la propiedad distributiva. La propiedad distributiva le diría a multiplicarse x en el primer conjunto de corchetes por todo el interior del segundo conjunto de corchetes, después multiplicar 6 en el primer conjunto de corchetes por todo en el segundo conjunto de corchetes. Vamos a ver lo que parece.



$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= 5x \\ 3 &= 6x \\ 4 &= 30 \end{aligned}$$



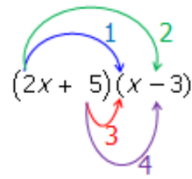
$$(x + 6)(x + 5) = x^2 + 5x + 6x + 30$$

$$= x^2 + 11x + 30$$

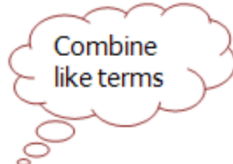
Ejemplo B

Usa la propiedad distributiva para hallar el producto de $(2x + 5)(x - 3)$

Para responder a esta pregunta, también se va a utilizar la propiedad distributiva. La propiedad distributiva le diría a multiplicarse $2x$ en el primer conjunto de corchetes por todo el interior del segundo conjunto de corchetes, después multiplicar 5 en el primer conjunto de corchetes por todo en el segundo conjunto de corchetes. Vamos a ver lo que parece.



$$\begin{aligned} 1 &= 2x^2 \\ 2 &= -6x \\ 3 &= 5x \\ 4 &= -15 \end{aligned}$$

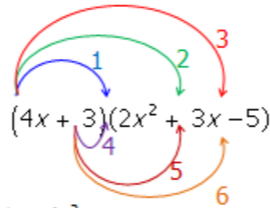


$$\begin{aligned} (2x + 5)(x - 3) &= 2x^2 - 6x + 5x - 15 \\ &= 2x^2 - x - 15 \end{aligned}$$

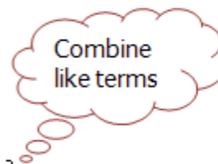
Ejemplo C

Usa la propiedad distributiva para hallar el producto de $(4x + 3)(2x^2 + 3x - 5)$

En un primer momento, esta pregunta puede parecer diferente, pero aún así usar la propiedad distributiva para hallar el polinomio. La propiedad distributiva le diría a multiplicarse $4x$ en el primer conjunto de corchetes por todo el interior del segundo conjunto de corchetes, después multiplicar 3 en el primer conjunto de corchetes por todo en el segundo conjunto de corchetes. Vamos a ver lo que parece.



$$\begin{aligned} 1 &= 4x^3 \\ 2 &= 12x^2 \\ 3 &= -20x \\ 4 &= 6x^2 \\ 5 &= 9x \\ 6 &= -15 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (4x + 3)(2x^2 + 3x - 5) &= 4x^3 + 12x^2 - 20x + 6x^2 + 9x - 15 \\ &= 4x^3 + 18x^2 - 11x - 15 \end{aligned}$$

Palabras Clave

Propiedad distributiva

La **propiedad distributiva** es una manera matemática de agrupar términos. Se afirma que el producto de un número y una suma es igual a la suma de los productos individuales de la serie y los sumandos. Por ejemplo, en la expresión: $\frac{2}{3}(x + 5)$, la propiedad distributiva afirma que el producto de un número ($\frac{2}{3}$) y una suma ($x + 5$) es igual a la suma de los productos individuales de la serie ($\frac{2}{3}$) y los sumandos (x y 5).

Términos semejantes

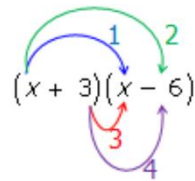
Al igual que los términos se refieren a los términos en los que el partido grados y las variables coinciden. Por ejemplo $3x$, y $4x$ son términos semejantes.

Práctica guiada

1. Usa la propiedad distributiva para encontrar el producto $(x + 3)(x - 6)$.
2. Usa la propiedad distributiva para encontrar el producto $(2x + 5)(3x^2 - 2x - 7)$.
3. Un campo de fútbol promedio tiene las dimensiones de 160 pies por 360 pies Si las expresiones para encontrar estas dimensiones eran $(3x + 7)$ y $(7x + 3)$, cuál es el valor de la x daría a las dimensiones del campo de fútbol?

Respuestas

1. $(x + 3)(x - 6)$

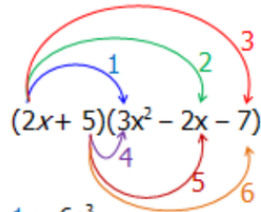


$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= -6x \\ 3 &= 3x \\ 4 &= -18 \end{aligned}$$

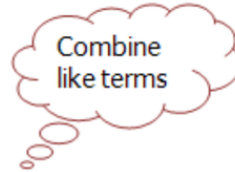


$$\begin{aligned} (x + 3)(x - 6) &= x^2 - 6x + 3x - 18 \\ &= x^2 - 3x - 18 \end{aligned}$$

2. $(2x + 5)(3x^2 - 2x - 7)$



$$\begin{aligned}
 1 &= 6x^3 \\
 2 &= -4x^2 \\
 3 &= -14x \\
 4 &= 15x^2 \\
 5 &= -10x \\
 6 &= -35
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (4x + 3)(2x^2 + 3x - 5) &= 6x^3 - 4x^2 - 14x + 15x^2 - 10x - 35 \\
 &= 6x^3 + 11x^2 - 25x - 35
 \end{aligned}$$

$$3. \text{ Area} = l \times w$$

$$\text{Area} = 360 \times 160$$

$$(7x + 3) = 360$$

$$7x = 360 - 3$$

$$7x = 357$$

$$x = 51$$

$$(3x + 7) = 160$$

$$3x = 160 - 7$$

$$3x = 153$$

$$x = 51$$

Por lo tanto el valor de x que satisface estas expresiones es de 51.

Resumen

Con la multiplicación de binomios y polinomios para obtener polinomios aún más grandes, se puede usar la propiedad distributiva. Recuerde que cuando se utiliza la propiedad distributiva, todo en el primer conjunto de corchetes primero debe ser multiplicado por todo en el segundo conjunto de corchetes. Después de haber hecho esto, sólo tiene que combinar términos semejantes y entonces se tiene la respuesta final.

Ejercicios Resueltos

Usa la propiedad distributiva para hallar el producto de cada uno de los siguientes polinomios:

1. $(x + 4)(x + 6)$
2. $(x + 3)(x + 5)$
3. $(x + 7)(x - 8)$
4. $(x - 9)(x - 5)$
5. $(x - 4)(x - 7)$

Usa la propiedad distributiva para hallar el producto de cada uno de los siguientes polinomios:

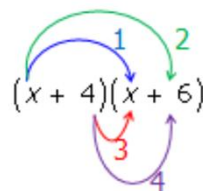
1. $(x + 3)(x^2 + x + 5)$
2. $(x + 7)(x^2 - 3x + 6)$
3. $(2x + 5)(x^2 - 8x + 3)$
4. $(2x - 3)(3x^2 + 7x + 6)$
5. $(5x - 4)(4x^2 - 8x + 5)$

Usa la propiedad distributiva para hallar el producto de cada uno de los siguientes polinomios:

1. $9a^2(6a^3 + 3a + 7)$
2. $-4s^2(3s^3 + 7s^2 + 11)$
3. $(x + 5)(5x^3 + 2x^2 + 3x + 9)$
4. $(t - 3)(6t^3 + 11t^2 + 22)$
5. $(2g - 5)(3g^3 + 9g^2 + 7g + 12)$

Respuestas

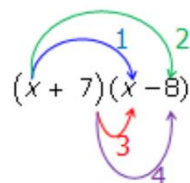
Usando la propiedad distributiva ...



$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= 6x \\ 3 &= 4x \\ 4 &= 24 \end{aligned}$$

Combine like terms

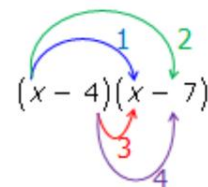
$$\begin{aligned} 1. \quad (x+4)(x+6) &= x^2 + 6x + 4x + 24 \\ &= x^2 + 10x + 24 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= -8x \\ 3 &= 7x \\ 4 &= -56 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} 3. \quad (x+7)(x-8) &= x^2 - 8x + 7x - 56 \\ &= x^2 - x - 56 \end{aligned}$$



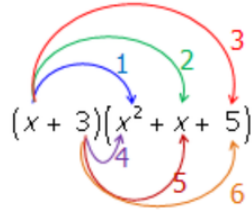
$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= -7x \\ 3 &= -4x \\ 4 &= 28 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} 5. \quad (x-4)(x-7) &= x^2 - 7x - 4x + 28 \\ &= x^2 - 11x + 28 \end{aligned}$$

Usando la propiedad distributiva ...

1. $(x + 3)(x^2 + x + 5)$

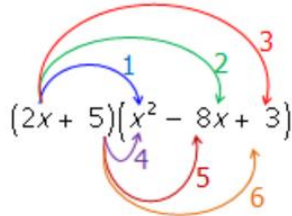


$1 = x^2$
 $2 = x^2$
 $3 = 5x$
 $4 = 3x^2$
 $5 = 3x$
 $6 = 15$

$$(x + 3)(x^2 + x + 5) = x^3 + x^2 + 5x + 3x^2 + 3x + 15$$
$$= x^3 + 4x^2 + 8x + 15$$

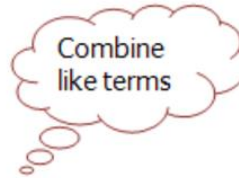


3. $(2x + 5)(x^2 - 8x + 3)$

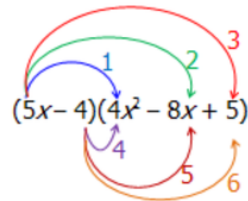


$1 = 2x^2$
 $2 = -16x^2$
 $3 = 6x$
 $4 = 5x^2$
 $5 = -40x$
 $6 = 15$

$$(2x + 5)(x^2 - 8x + 3) = 2x^3 - 16x^2 + 6x + 5x^2 - 40x + 15$$
$$= 2x^3 - 11x^2 - 34x + 15$$



5. $(5x - 4)(4x^2 - 8x + 5)$



1 = $20x^3$

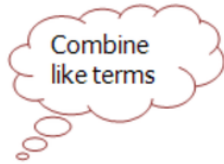
2 = $-40x^2$

3 = $25x$

4 = $-16x^2$

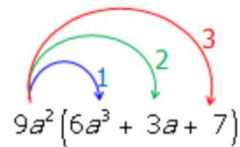
5 = $32x$

6 = -20



$$\begin{aligned} (5x - 4)(4x^2 - 8x + 5) &= 20x^3 - 40x^2 + 25x - 16x^2 + 32x - 20 \\ &= 20x^3 - 56x^2 + 57x - 20 \end{aligned}$$

Usando la propiedad distributiva ...



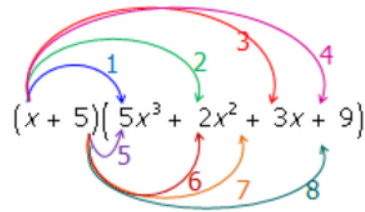
1 = $9a^5$

2 = $27a^3$

3 = $63a^2$

1. $9a^2(6a^3 + 3a + 7) = 9a^2(6a^3 + 3a + 7) = 9a^5 + 27a^3 + 63a^2$

3. $(x + 5)(5x^3 + 2x^2 + 3x + 9)$

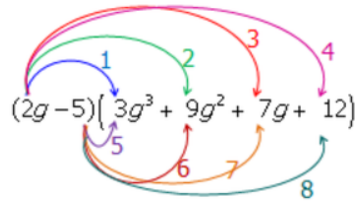


- 1 = $5x^4$
- 2 = $2x^3$
- 3 = $3x^2$
- 4 = $9x$
- 5 = $25x^3$
- 6 = $10x^2$
- 7 = $15x$
- 8 = 45

Combine like terms

$$\begin{aligned} (x + 5)(5x^3 + 2x^2 + 3x + 9) &= 5x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 9x + 25x^3 + 10x^2 + 15x + 45 \\ &= 5x^4 + 27x^3 + 13x^2 + 24x + 45 \end{aligned}$$

5. $(2g - 5)(3g^3 + 9g^2 + 7g + 12)$



- 1 = $6g^4$
- 2 = $18g^3$
- 3 = $14g^2$
- 4 = $24g$
- 5 = $-15g^3$
- 6 = $-45g^2$
- 7 = $-35g$
- 8 = -60

Combine like terms

$$\begin{aligned} (2g - 5)(3g^3 + 9g^2 + 7g + 12) &= 6g^4 + 18g^3 + 14g^2 + 24g - 15g^3 - 45g^2 - 35g - 60 \\ &= 6g^4 + 3g^3 - 31g^2 - 11g - 60 \end{aligned}$$

Casos especiales

Introducción

Con la multiplicación de binomios, hay casos especiales que cuando se aprende a reconocerlos, se hace la multiplicación más rápida y eficiente. En este concepto se va a reconocer el patrón que está involucrado con casos especiales de polinomios. Una vez que se comienza a ver este patrón en los cálculos que está haciendo, su resolución de problemas muy probablemente será más rápido.

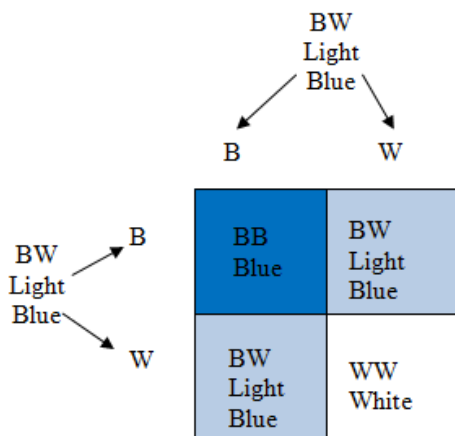
Hay tres productos especiales diferentes que se miran en este concepto. Estos incluyen los siguientes:

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

La estrategia para resolver estos casos especiales es el mismo que se utilizó en el concepto anterior. En otras palabras, una vez más va a usar la propiedad distributiva. Sin embargo, a medida que avanza a través de este concepto, asegúrese de prestar especial atención a los patrones que se producen cuando se multiplican los dos binomios.

Marco Teórico

Una flor es azul (RR) y la otra flor es blanca (rr). Utilice un cuadro de Punnett para demostrar que una mezcla de los dos puede producir una flor blanca.



Cada flor tendrá la mitad de los genes azules y una media de los genes blanco. Por lo tanto la ecuación formada será:

$$0.5B + 0.5W$$


La descendencia tendrá la composición genética (la mezcla producida) usando la ecuación:

$$(0.5B + 0.5W)^2$$

Ten en cuenta que este es uno de los productos especiales (producto especial número 1 arriba).

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Así que se puede ampliar la ecuación composición genética descendiente para averiguar el porcentaje de crías (o flores) que será azul, blanco o azul claro.

$$(0.5B + 0.5W)^2 = (0.5B + 0.5W)(0.5B + 0.5W)$$


$$1 = 0.25B^2$$

$$2 = 0.25BW$$

$$3 = 0.25BW$$

$$4 = 0.25W^2$$

Combine like terms

$$(0.5B + 0.5W)^2 = 0.25B^2 + 0.25BW + 0.25BW + 0.25W^2$$

$$= 0.25B^2 + 0.50BW + 0.25W^2$$

Por lo tanto el 25% de las flores descendencia será azul, el 50% será de color azul claro, y el 25% será blanco.

Ejemplo A

Encuentra el producto: $(x + 11)^2$.

Este es uno de los productos especiales similares al ejemplo anterior. El primer paso es ampliar los binomios antes de aplicar la propiedad distributiva.

$$(x + 11)^2 = (x + 11)(x + 11)$$

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= 11x \\ 3 &= 11x \\ 4 &= 121 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (x + 11)^2 &= x^2 + 11x + 11x + 121 \\ &= x^2 + 22x + 121 \end{aligned}$$

Ejemplo B

Encuentra el producto: $(x - 7)^2$.

Este es un segundo tipo de los productos especiales de los polinomios. Una vez más, el primer paso es ampliar los binomios antes de aplicar la propiedad distributiva.

$$(x - 7)^2 = (x - 7)(x - 7)$$

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= -7x \\ 3 &= -7x \\ 4 &= 49 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (x - 7)^2 &= x^2 - 7x - 7x + 49 \\ &= x^2 - 14x + 49 \end{aligned}$$

Ejemplo C

Encuentra el producto: $(x + 9)(x - 9)$

Este es el tercer tipo de los productos especiales de los polinomios. Para este tipo, los binomios que ya se expanden y sólo tiene que aplicar la propiedad distributiva.

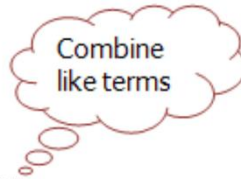
$$(x + 9)(x - 9)$$

$$1 = x^2$$

$$2 = 9x$$

$$3 = -9x$$

$$4 = -81$$



$$\begin{aligned} (x + 9)(x - 9) &= x^2 + 9x - 9x - 81 \\ &= x^2 - 81 \end{aligned}$$

Fíjate en este último ejemplo, cuando los binomios tienen los mismos términos numéricos y signos opuestos, que cuando se expande no hay término medio. En otras palabras:

$$\text{Producto especial: } (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$\text{Ejemplo: } (x + 9)(x - 9) = x^2 - 81$$

Palabras Clave

Propiedad distributiva

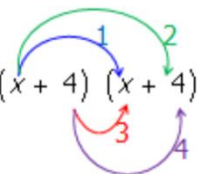
La **propiedad distributiva** es una manera matemática de agrupar términos. Se afirma que el producto de un número y una suma es igual a la suma de los productos individuales de la serie y los sumandos. Por ejemplo, en la expresión: $3(x + 5)$, la propiedad distributiva afirma que el producto de un número (3) y una suma ($x + 5$) es igual a la suma de los productos individuales de la serie (3) y los sumandos (x y 5).

Ejercicios Resueltos

1. Expanda la siguiente binomio $(x + 4)^2$.
2. Expanda la siguiente binomio $(5x - 3)^2$.
3. Determinar si cada una de las siguientes es una diferencia de dos cuadrados:
 - a) $a^2 - 16$
 - b) $9b^2 - 49$
 - c) $c^2 - 60$

Respuestas

1. $(x + 4)^2$.

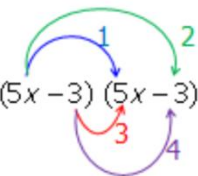
$$(x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4)$$


$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= 4x \\ 3 &= 4x \\ 4 &= 16 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 &= x^2 + 4x + 4x + 16 \\ &= x^2 + 8x + 16 \end{aligned}$$

2. $(5x - 3)^2$

$$(5x - 3)^2 = (5x - 3)(5x - 3)$$


$$\begin{aligned} 1 &= 25x^2 \\ 2 &= -15x \\ 3 &= -15x \\ 4 &= 9 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} (5x - 3)^2 &= 25x^2 - 15x - 15x + 9 \\ &= 25x^2 - 30x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 a^2 - 16 \\
 \nearrow \quad \nwarrow \\
 a^2 = a \times a \quad \text{Factors of 16 :}
 \end{array}$$

$$1 \times 16$$

$$2 \times 8$$

3. a) 4×4

Por lo tanto: $a^2 - 16 = (a + 4)(a - 4)$ Si, $a^2 - 16$ es una diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{array}{c}
 9b^2 - 49 \\
 \nearrow \quad \nwarrow \\
 b^2 = b \times b \quad \text{Factors of 49 :}
 \end{array}$$

and 1×49

Factors of 9 : 7×7

$$1 \times 9$$

b) 3×3

Por lo tanto: $9b^2 - 49 = (3b + 7)(3b - 7)$

Sí, $9b^2 - 49$ es una diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{array}{c}
 c^2 - 60 \\
 \nearrow \quad \nwarrow \\
 c^2 = c \times c \quad \text{Factors of 60 :}
 \end{array}$$

$$1 \times 60$$

$$2 \times 30$$

$$3 \times 20$$

$$4 \times 15$$

$$5 \times 12$$

c) 6×10

Dado que no existen factores de 60 que coincide (como $4 \times 4 = 16$ y $7 \times 7 = 49$), la expresión $c^2 - 60$ no se puede decir que hay una diferencia de dos cuadrados.

Resumen

Las tres lecciones anteriores comenzaron el estudio de la expansión polinómica. En concreto ha tenido la oportunidad de sumar, restar y multiplicar polinomios utilizando fichas de álgebra, los métodos horizontales y verticales, así como la propiedad distributiva. En esta lección final de la sección, que estaba trabajando con los casos especiales de los polinomios. Hay tres casos especiales que, cuando se enteró, le ayudan a ser capaz de encontrar el producto de binomios un poco más fácil y rápidamente.

Los tres casos especiales implican elevar al cuadrado un binomio tales como en $(x + y)^2$, y $(x - y)^2$, y un caso que implica la multiplicación de la suma y diferencia binomios $(x + y)(x - y)$. Los tres casos especiales, junto con un ejemplo se muestran para se a continuación.

Caso especial 1: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Ejemplo: $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

Caso especial 2: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Ejemplo: $(2x - 8)^2 = 4x^2 - 32x + 64$

Caso especial 3: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Ejemplo: $(5x + 10)(5x - 10) = 25x^2 - 100$

Ejercicios

Expandir los siguientes binomios:

1. $(t + 12)^2$
2. $(w + 15)^2$
3. $(2e + 7)^2$
4. $(3z + 2)^2$
5. $(7m + 6)^2$

Expandir los siguientes binomios:

1. $(g - 6)^2$
2. $(d - 15)^2$
3. $(4x - 3)^2$
4. $(2p - 5)^2$
5. $(6t - 7)^2$

Encontrar el producto de los siguientes binomios:

1. $(x + 13)(x - 13)$
2. $(x + 6)(x - 6)$
3. $(2x + 5)(2x - 5)$
4. $(3x + 4)(3x - 4)$
5. $(6x + 7)(6x - 7)$

Respuestas
Ampliar ...

$$(t + 12)^2 = (t + 12)(t + 12)$$

$$\begin{aligned} 1 &= t^2 \\ 2 &= 12t \\ 3 &= 12t \\ 4 &= 144 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} 1. \quad (t + 12)^2 &= t^2 + 12t + 12t + 144 \\ &= t^2 + 24t + 144 \end{aligned}$$

$$(2e + 7)^2 = (2e + 7)(2e + 7)$$

$$\begin{aligned} 1 &= 4e^2 \\ 2 &= 14e \\ 3 &= 14e \\ 4 &= 49 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} 3. \quad (2e + 7)^2 &= 4e^2 + 14e + 14e + 49 \\ &= 4e^2 + 28e + 49 \end{aligned}$$

$$(7m + 6)^2 = (7m + 6)(7m + 6)$$

$$\begin{aligned} 1 &= 49m^2 \\ 2 &= 42m \\ 3 &= 42m \\ 4 &= 36 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} (7m + 6)^2 &= 49m^2 + 42m + 42m + 36 \\ &= 49m^2 + 84m + 36 \end{aligned}$$

5. $(7m + 6)^2$
Ampliar ...

$$(g - 6)^2 = (g - 6)(g - 6)$$

$$\begin{aligned} 1 &= g^2 \\ 2 &= -6g \\ 3 &= -6g \\ 4 &= 36 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} (g - 6)^2 &= g^2 - 6g - 6g + 36 \\ &= g^2 - 12g + 36 \end{aligned}$$

1. $(g - 6)^2$

$$(4x - 3)^2 = (4x - 3)(4x - 3)$$

$$\begin{aligned} 1 &= 16x^2 \\ 2 &= -12x \\ 3 &= -12x \\ 4 &= 9 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$\begin{aligned} (4x - 3)^2 &= 16x^2 - 12x - 12x + 9 \\ &= 16x^2 - 24x + 9 \end{aligned}$$

3. $(4x - 3)^2$

$$(6t - 7)^2 = (6t - 7)(6t - 7)$$

$$\begin{aligned} 1 &= 36t^2 \\ 2 &= -42t \\ 3 &= -42t \\ 4 &= 49 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$(6t - 7)^2 = 16t^2 - 42t - 42t + 49$$

$$5. (6t - 7)^2 = 16t^2 - 84t + 49$$

Encuentra el producto ...

$$(x + 13)(x - 13)$$

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 \\ 2 &= 13x \\ 3 &= -13x \\ 4 &= -169 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$(x + 13)(x - 13) = x^2 + 13x - 13x - 169$$

$$1. (x + 13)(x - 13)$$

$$= x^2 - 169$$

$$(2x + 5)(2x - 5)$$

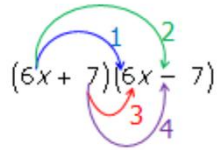
$$\begin{aligned} 1 &= 4x^2 \\ 2 &= 10x \\ 3 &= -10x \\ 4 &= -25 \end{aligned}$$

Combine like terms

$$(2x + 5)(2x - 5) = 4x^2 + 10x - 10x - 25$$

$$3. (2x + 5)(2x - 5)$$

$$= 4x^2 - 25$$



$$1 = 36x^2$$

$$2 = 42x$$

$$3 = -42x$$

$$4 = -49$$

Combine
like terms

$$\begin{aligned} 5. \quad (6x + 7)(6x - 7) &= 36x^2 + 42x - 42x - 49 \\ &= 36x^2 - 49 \end{aligned}$$

División de Polinomios

Marco Teórico

Comenzaremos con una propiedad que es el inverso de la suma de fracciones de la propiedad presentada en conceptos anteriores.

Para todos los números reales a , b , y c , y $c \neq 0$, $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Esta propiedad permite separar el numerador en sus fracciones individuales. Esta propiedad se utiliza al dividir un polinomio por un monomio.

Ejemplo A

Simplifica $\frac{8x^2-4x+16}{2}$.

Solución:

Usando la propiedad anterior, separar el polinomio en sus fracciones individuales.

$$\frac{8x^2}{2} - \frac{4x}{2} + \frac{16}{2}$$

Reduce.

$$4x^2 - 2x + 8$$

Ejemplo B

Simplifica $\frac{-3m^2-18m+6}{9m}$.

Solución:

Separe el trinomio en sus fracciones individuales y reducir.

$$-\frac{3m^2}{9m} - \frac{18m}{9m} + \frac{6}{9m}$$
$$-\frac{m}{3} - 2 + \frac{2}{3m}$$

Polinomios también se pueden dividir por binomios. Sin embargo, en lugar de separar en sus fracciones individuales, se utiliza un proceso llamado división larga.

Ejemplo C

Simplifica $\frac{x^2+4x+5}{x+3}$.

Solución:

Cuando llevamos a cabo la división, la expresión en el numerador se llama el **dividendo** y la expresión en el denominador se llama **divisor**.

Para iniciar la división volvemos a escribir el problema en el siguiente formulario.

$$x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5}$$

Comienza dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor $\frac{x^2}{x} = x$. Coloque la respuesta en la línea por encima del x término.

$$x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5}$$

A continuación, multiplica el x plazo de la respuesta de cada uno de los $x + 3$ términos en el divisor y coloca el resultado debajo de la dividida, haciendo coincidir los términos semejantes.

$$x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5}$$

$x(x + 3) = x^2 + 3x$

Ahora resta $x^2 + 3x$ del $x^2 + 4x + 5$. Es útil para cambiar los signos de los términos de $x^2 + 3x$ a $-x^2 - 3x$ y añadir términos semejantes verticalmente.

$$x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5}$$
$$\underline{-x^2 - 3x}$$
$$x$$

Ahora, bajar 5, la próxima legislatura en el dividendo.

$$x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5}$$
$$\underline{-x^2 - 3x}$$
$$x + 5$$

Repita el proceso. Primero divide el primer término de $x + 5$ la primera legislatura del divisor $\left(\frac{x}{x}\right) = 1$. Coloca esta respuesta en la línea sobre el término constante del dividendo.

$$\begin{array}{r}
 x + 1 \\
 x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5} \\
 \underline{-x^2 - 3x} \\
 x + 5
 \end{array}$$

Multiplicar 1 por el divisor $x + 3$ y escribir la respuesta a continuación $x + 5$, haciendo coincidir los términos semejantes.

multiply

$$\begin{array}{r}
 x + 1 \\
 x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5} \\
 \underline{-x^2 - 3x} \\
 x + 5
 \end{array}$$

Resta $x + 3$ de $x + 5$ cambiando los signos de $x + 3$ que $-x - 3$ y añadiendo los términos semejantes.

$$\begin{array}{r}
 x + 1 \quad \text{quotient} \\
 x + 3 \overline{) x^2 + 4x + 5} \\
 \underline{-x^2 - 3x} \\
 x + 5 \\
 \underline{-x - 3} \quad \text{remainder} \\
 2
 \end{array}$$

Como no hay más términos del dividendo a derribar, hemos terminado.

La respuesta es $x + 1$ con un resto de 2.

Ejercicios Resueltos

Divida $9x^2 - 16$ por $3x + 4$.

Solución:

Se pide a simplificar:

$$\frac{9x^2 - 16}{3x + 4}.$$

Se puede utilizar el algoritmo de división para encontrar la respuesta. También se puede utilizar los patrones de los polinomios de simplificar y cancelar.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Recuerda utilizar este modelo para resolver este problema, ya que $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2$:

$$\begin{aligned}\frac{9x^2 - 16}{3x + 4} &= \frac{(3x)^2 - 4^2}{3x + 4} \\ &= \frac{(3x - 4)(3x + 4)}{3x + 4} \\ &= 3x - 4\end{aligned}$$

Ejercicios

Divide los siguientes polinomios.

1. $\frac{2x+4}{2}$

2. $\frac{x-4}{x}$

3. $\frac{5x-35}{5x}$

4. $\frac{x^2+2x-5}{x}$

5. $\frac{4x^2+12x-36}{-4x}$

6. $\frac{2x^2+10x+7}{2x^2}$

7. $\frac{x^3-x}{-2x^2}$

8. $\frac{5x^4-9}{3x}$

9. $\frac{x^3-12x^2+3x-4}{12x^2}$

10. $\frac{3-6x+x^3}{-9x^3}$

11. $\frac{x^2+3x+6}{x+1}$

12. $\frac{x^2-9x+6}{x-1}$
13. $\frac{x^2+5x+4}{x+4}$
14. $\frac{x^2-10x+25}{x-5}$
15. $\frac{x^2-20x+12}{x-3}$
16. $\frac{3x^2-x+5}{x-2}$
17. $\frac{9x^2+2x-8}{x+4}$
18. $\frac{3x^2-4}{3x+1}$
19. $\frac{5x^2+2x-9}{2x-1}$
20. $\frac{x^2-6x-12}{5x+4}$
21. $\frac{x^4-2x}{8x+24}$
22. $\frac{x^3+1}{4x-1}$

