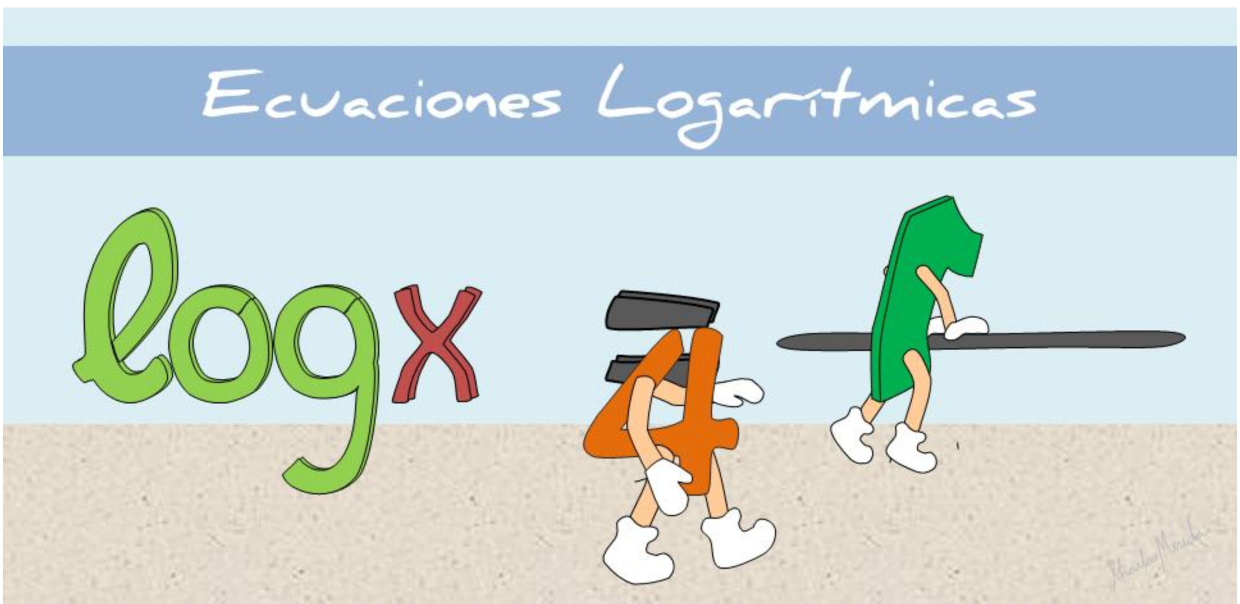
2
2da Unidad

Logaritmo

2.4 Ecuaciones Logarítmicas

Todas las experiencias que vivimos son parte de las herramientas que nos servirán para asumir nuevas responsabilidades o retos. Debemos cuidar nuestras herramientas y hacerles mantenimiento para que siempre estén en condiciones de ser usadas con eficiencia.

Descripción



Hemos conocido la definición de logaritmo, logaritmos notables y la forma en que operamos con ellos para transformar expresiones. Ahora empezaremos a aplicar lo que hemos aprendido. Identificaremos y resolveremos ecuaciones logarítmicas. Ejercitemos.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Propiedades de las Potencias, Resolución de Ecuaciones, Ecuaciones Lineales y Ecuaciones de 2do Grado.

Contenido

Solución de Ecuaciones Logarítmicas Lineales, Resolver Ecuaciones Logarítmicas de 2do Grado.

Videos disponibles

LOGARITMO. Solución de Ecuaciones Logarítmicas Lineales

LOGARITMO. Resolver Ecuaciones Logarítmicas de 2do Grado

Guiones Didácticos

LOGARITMO. Solución de Ecuaciones Logarítmicas Lineales

Ecuación logarítmica. Es aquella en la que la incógnita está como argumento del logaritmo

¿Cuál de estas dos es una ecuación logarítmica?

$$x\log_2 24 + 3y = 6 \qquad\qquad 5\log x - 20 = 0$$

En la primera ecuación hay un logaritmo, pero su argumento es un número conocido y la incógnita está libre de logaritmo

$$x\log_2 24 + 3y = 6$$

La segunda ecuación tiene la incógnita como argumento del logaritmo, esta es la **ecuación logarítmica**.

$$5\log x - 20 = 0$$

Estudiemos 2 tipos de ecuaciones logarítmicas básicas: Lineales y de 2do Grado.

Ecuaciones Logarítmicas Lineales. El logaritmo tiene exponente 1.

Exponente 1

$$a\log_b x + c = 0$$

Lo que significa que puede despejarse el logaritmo y aplicar definición para luego despejar la incógnita.

$$\log_b x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Puede despejarse el logaritmo}$$

$$x = b^{-\frac{c}{a}} \qquad \text{y despejarse la incógnita aplicando definición}$$

Ejemplo

Hallar el valor de x en la ecuación: $2\log x - \frac{3}{2} = 0$

la incógnita está como argumento del logaritmo.

$$2\log x - \frac{3}{2} = 0$$

Primero despejamos el logaritmo, el 3/2 que está restando, pasa al otro lado de la igualdad sumando.

$$2\log x = \frac{3}{2}$$

El 2 que está multiplicando al otro lado de la igualdad dividiendo

$$\log x = \frac{3}{2\cdot 2}$$

Nota: Si pasa dividiendo, se ubicará en el denominador del otro lado de la igualdad, lo que significa que multiplica a lo que esté en el denominador de la fracción en el 2do lado de la igualdad.

Para liberar el argumento del logaritmo, aplicamos la definición.

$$\log x = \frac{3}{4} \longrightarrow x = 10^{3/4}$$

¿por qué la base de la potencia es 10?.

En la 2da lección de logaritmo vimos que si la base de un logaritmo no aparece de forma explícita (no está visible), es porque la base es 10.

Transformamos la potencia en raíz. $x = 10^{3/4} \rightarrow x = \sqrt[4]{10^3}$

La solución de la ecuación es $\boxed{x = \sqrt[4]{1000}}$

Acompáñanos a la siguiente lección para ver cómo resolver ecuaciones logarítmicas de 2do grado.

LOGARITMO. Resolver Ecuaciones Logarítmicas de 2do Grado

Ecuaciones Logarítmicas de 2do Grado. Hay al menos una potencia cuadrada de logaritmo, que es a su vez el mayor exponente del logaritmo en la ecuación.

Grado 2

$$a\log_k^2 x + b\log_k x + c = 0$$

Para resolverla, debemos sustituir temporalmente el logaritmo por una variable nueva.

$$a\log_k^2 x + b\log_k x + c = 0$$

$$\boxed{\log_k x = y}$$

Y con esto queda clara la forma cuadrática de la ecuación. $ay^2 + by + c = 0$

Ejemplo

Hallar el valor de x en la ecuación: $\log_4^2 x - 3\log_4 x - 10 = 0$

La ecuación dada tiene un término en el que el logaritmo está elevado a la 2 un término donde el logaritmo está elevado a la 1 y un término independiente.

$$\log_4^2 x - 3\log_4 x - 10 = 0$$

Escribiremos el cuadrado del logaritmo de esta manera, para poder tener claro el panorama ahora podemos sustituir logaritmo en base 4 de x por y

$$(\log_4 x)^2 - 3(\log_4 x) - 10 = 0$$

Sustituimos: $\log 4x \rightarrow y$

$$y^2 - 3y - 10 = 0$$

Tenemos una ecuación de 2do grado

Ecuación de 2do grado: $ax^2 + bx + c = 0$

Fórmula para resolver ecuaciones de 2do grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La variable de la ecuación es y, a = 1, b = -3 y c = -10

Sustituimos estos valores en la fórmula para resolver ecuaciones de 2do grado

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

Efectuaremos las operaciones de la raíz y denominador.

$$y = \frac{3 \pm 7}{2}$$

Hay dos posibles valores para y, uno es 5 y otro es -2 $y_1 = 5$ $y_2 = -2$

¿qué hacemos ahora?

Como ya esta resuelta la ecuación de 2do grado, regresamos el cambio de variables que hicimos.

$\log_4 x \rightarrow y$

$\log_4 x_1 = 5$ $\log_4 x_2 = -2$

Resultan dos ecuaciones logarítmicas lineales. Aplicaremos definición de logaritmo para despejar x

$x_1 = 4^5$ $x_2 = 4^{-2}$

Efectuamos las potencias en cada caso:

$\boxed{x_1 = 1024}$ $\boxed{x_2 = \frac{1}{16}}$

Hay una gran variedad de casos en este tipo de ecuaciones, los iremos estudiando en las lecciones prácticas para que tengas suficiente material con qué guiarte en tu práctica avancemos

A Practicar

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas lineales:

1. $4\log x - 1 = 0$ 2. $\log x^2 - 2 = 0$ 3. $\log\sqrt[6]{x} - \frac{1}{3} = 0$ 4. $\log x^5 + \log\sqrt[3]{x^2} = 51$

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas cuadráticas:

5. $\log^2 x = 9$ 6. $\log^2 x - 3\log x = 0$ 7. $\log^2 x - \log x = 6$ 8. $2\log^2 x - \log x = 10$

¿Lo Hicimos Bien?

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas lineales:

1. $x = \frac{1}{4}$ 2. $x = \pm 10$ 3. $x = 100$ 4. $x = 10^9$

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas cuadráticas:

5. $x = 10^{-3}$, $x = 10^3$ 6. $x = 1$, $x = 10^3$ 7. $x = 10^3$, $x = 10^{-2}$

8. $x = 10^{5/2}$, $x = 10^{-2}$